Institut für Informatik der
Universität Zürich

Sommersemester 2005

2. Hausaufgabe
Formale Grundlagen der Informatik

Norbert E. Fuchs (fuchs@ifi.unizh.ch)
Tobias Kuhn (t.kuhn@gmx.ch)
Gérard Milmeister (milmei@ifi.unizh.ch)
Jody Weissmann (jody@ifi.unizh.ch)

Abgabe bis 3. Mai 2005, 17.00 Uhr
Briefkasten 67-c, Stockwerk K, Institut für Informatik der Universität Zürich

Bitte die Lösungen direkt in die vorgesehenen Lücken der Blätter schreiben!

Thema: Relationen und Aussagenlogik

Name	Vorname	Matrikelnummer

Aufgabe 1

Eine total geordnete Menge $(A, \preceq)$ ist wohlgeordnet (oder $\preceq$ ist eine Wohlordnung auf A), wenn jede nichtleere Teilmenge von A ein kleinstes Element hat. Untersuche folgende Mengen mit den jeweiligen Ordnungen auf Wohlordnung und begründe den Befund.

- $(\mathbb{N}, \leq)$
- $(\mathbb{Z}, \leq)$
- $([0, 1] \subset \mathbb{R}, \leq)$
- $(\mathbb{N}, \geq)$

Aufgabe 2

Betrachte die Relation $\models \subset A \times A$, wobei A die Menge aller logischen Aussagen ist, d.h., $P \models Q$ genau dann, wenn jede Zuordnung von Wahrheitswerten, die P wahr macht, auch Q wahr macht.
Untersuche die Relation $\models$ auf die Eigenschaften Reflexivität, Symmetrie, Antisymmetrie, Transitivität, kleinstes Element, grösstes Element. Beweise jeweils, dass eine Eigenschaft zutrifft oder nicht zutrifft. Von welchem Relationstyp ist $\models$?

Aufgabe 3

3.1

Seien $M_1, M_2, M_3 \subset \mathbb{N}$ mit $M_1 = \{4, 6, 8\}$, $M_2 = \{3, 4, 6\}$, $M_3 = \{8, 18, 27\}$, und

$$R_i = \{(x, y) \in M_i \times M_i \mid x \text{ ist ein Teiler von } y\}, i = 1, 2, 3$$

Bestimme, ob (M_i, R_i) ein Verband ist. Wenn (M_i, R_i) kein Verband ist, gib die kleinste Menge M_i' mit $M_i \subset M_i'$ an, so dass (M_i', R_i) ein Verband ist. Gib ausserdem für jedes $i \in \{1, 2, 3\}$ das grösste und das kleinste Element des Verbandes (M_i', R_i) an.

3.2

Seien M eine Menge und $R \subset M \times M$ eine Relation und $M_1 \subset M$ und $M_2 \subset M$ Teilmengen von M. Bezeichne ferner für eine beliebige Menge $X \subset M$ mit $V(X)$ die kleinste Menge Y, so dass $X \subset Y$ und (Y, R) ein Verband ist.
Ist die Aussage

$$V(M_1 \cup M_2) = V(M_1) \cup V(M_2)$$

wahr oder falsch? Begründe die Antwort.

Aufgabe 4

4.1

Viele Programmiersprachen implementieren die logischen Konnektoren *und* und *oder* als *conditional and* (**cand**) und *conditional or* (**cor**). So können logische Ausdrücke auch evaluiert werden, wenn ein Term nicht definiert ist. So ist z.B. $x = 0$ **cor** $\frac{1}{x} > 1$ immer definiert und ergibt W, falls $0 \leq x < 1$, und F sonst; aber $\frac{1}{x} > 1$ **cor** $x = 0$ ist nicht definiert, wenn $x = 0$.
Wir definieren eine 3-wertige Logik $\mathcal{L}_3$ mit den Wahrheitswerten W (wahr), F (falsch) und U (undefiniert), und den binären logischen Konnektor **cor** folgendermassen:

A	B	A **cor** B
W	W	W
W	F	W
W	U	W
F	W	W
F	F	F
F	U	U
U	W	U
U	F	U
U	U	U

Wieviele verschiedene binäre logische Funktionen gibt es in $\mathcal{L}_3$?

Ist **cor** kommutativ oder nicht? Begründe die Antwort.

4.2

Vereinfache folgende Formel soweit wie möglich. Gib zu jedem Schritt die verwendete Regel an.

$$((P \lor \neg Q) \to P) \land (Q \to (\neg P \lor Q))$$

Aufgabe 5

Gegeben sind folgende natürlichsprachliche Überlegungen, die sich Sherlock Holmes bei der Lösung eines schwierigen Falles machte:

P_1: Falls Professor Moriarty noch lebt, ist er der Täter.

P_2: Wenn Moriarty tot ist, dann ist er in den Reichenbachfällen umgekommen oder wurde von seinen Komplizen umgebracht.

P_3: Falls er in den Reichenbachfällen gestorben ist, hat man seine Leiche gefunden.

P_4: Wenn man seine Leiche nicht gefunden hat, wurde er nicht von den Komplizen ermordet.

P_5: Moriartys Leiche wurde nicht gefunden.

Holmes schliesst daraus:

K: Moriarty ist also der Täter.

5.1

Stelle die Aussagen P_1 bis P_5 als aussagenlogische Formelmenge M dar und die Konklusion als aussagenlogische Formel K (Hinweis: das exklusive Oder wird nicht gebraucht). Verwende dabei folgende Abkürzugen:

t: Moriarty lebt.

r: Moriarty ist in den Reichenbachfällen umgekommen.

k: Moriarty wurde von seinen Komplizen umgebracht.

f: Man hat Moriartys Leiche gefunden.

m: Professor Moriarty ist der Täter.

5.2

Zeige mittels eines Beweises durch Widerspruch, dass $M \models K$. Gehe dabei vor wie auf den Folien Seite 33 angegeben.