Institut für Informatik der
Universität Zürich

Sommersemester 2005

1. Hausaufgabe
Formale Grundlagen der Informatik

Norbert E. Fuchs (fuchs@ifi.unizh.ch)
Tobias Kuhn (t.kuhn@gmx.ch)
Gérard Milmeister (milmei@ifi.unizh.ch)
Jody Weissmann (jody@ifi.unizh.ch)

Abgabe bis 20. April 2005, 17.00 Uhr
Briefkasten 67-c, Stockwerk K, Institut für Informatik der Universität Zürich

Bitte die Lösungen direkt in die vorgesehenen Lücken der Blätter schreiben!

Thema: Mengen, Relationen und Funktionen

Name	Vorname	Matrikelnummer

Aufgabe 1

1.1

Geben Sie die Mengen

$$\begin{aligned}
M_1 &= \{1, 10, 100, 1000, 10000, \ldots\} \\
M_2 &= \{\text{Montag}, \text{Dienstag}, \text{Mittwoch}, \text{Donnerstag}, \text{Freitag}\} \\
M_3 &= \{0, 1, 8, 27, 64, 125, \ldots\} \\
M_4 &= \{0, 2, 8, 26, 80, 242, \ldots\} \\
M_5 &= \{3, 5, 7, 11, 13, 17, 19, 23, \ldots\}
\end{aligned}$$

in der Schreibweise $\{x \mid \mathcal{P}(x)\}$ an.

1.2

Gegeben sind die Mengen

$$A = \{a, b, c\}, B = \{b, d\}, C = \{\{a, b\}, \{b, d\}, \emptyset\}, D = \{\{a, b, c\}\}$$

Bestimmen Sie folgende Mengen:

$$A \cap (B - C), \mathcal{P}(A) \cap (C \cup D), C \cap (D - \mathcal{P}(B)), \mathcal{P}(B) \oplus C$$

Aufgabe 2

2.1

Seien A und B Teilmengen einer Grundmenge G. Beweisen Sie das Gesetz von De Morgan

$$A^c \cup B^c = (A \cap B)^c$$

direkt. Es ist hilfreich, sich den Sachverhalt mittels eines Venn-Diagramms zu veranschaulichen.

2.2

Gegeben seien die drei beliebigen Mengen A, B und C. Zeigen Sie anhand eines Venn-Diagramms und eines Gegenbeispiels an, dass die folgende Gleichheit *nicht* gilt:

$$A - (B \cup C) = (A - B) \cup (A - C)$$

Aufgabe 3

Gegeben sind folgende Relationen:

$$
\begin{aligned}
R_1 &= \{(x,y) \mid x \text{ und } y \text{ haben keinen gemeinsamen Teiler } > 1\} \subset \mathbb{N}_0 \times \mathbb{N}_0 \\
R_2 &= \{(x,y) \mid x \geq y\} \subset \mathbb{N}_0 \times \mathbb{N}_0 \\
R_3 &= \{(a,b) \mid a < b\} \subset \mathbb{R} \times \mathbb{R} \\
R_4 &= \{(a,b),(b,a),(c,c),(d,b)\} \subset \{a,b,c,d\} \times \{a,b,c,d\} \\
R_5 &= \{\} \subset \emptyset \times \emptyset \\
R_6 &= \{(a,b),(b,c),(a,c),(b,b)\} \subseteq \{a,b,c\} \times \{a,b,c\}
\end{aligned}
$$

Welche dieser Relationen sind reflexiv, irreflexiv, symmetrisch, antisymmetrisch, asymmetrisch oder transitiv? Ist eine der Relationen eine Funktion? Wenn ja, ist diese injektiv, surjektiv oder bijektiv?

Aufgabe 4

4.1

Gegeben sei die Relation

$$R = \{(a,b),(b,b),(b,d)\}$$

auf der Menge $A = \{a,b,c,d\}$. Bilden Sie die transitive Hülle $\langle R \rangle_t$, die symmetrische Hülle $\langle R \rangle_s$, die reflexiv-transitive Hülle $\langle R \rangle_{rt}$ und die reflexiv-symmetrisch-transitive Hülle $\langle R \rangle_{rst}$ von R.

4.2

Geben Sie im Falle von $\langle R \rangle_{rst}$ die Partition der Menge A an.

Aufgabe 5

5.1

Zeigen Sie, dass die Menge der reellen Zahlen im Intervall $[0, 1)$ und die Menge der Punkte im Quadrat mit der Kantenlänge 1 (Punkte $(x, y) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}$ mit $0 \leq x < 1$, $0 \leq y < 1$) dieselbe Mächtigkeit haben. (Hinweis: Darstellung von reellen Zahlen in Dezimalform, z.B. $0.27251\ldots$)

5.2

Geben Sie die Kardinalitäten folgender Mengen an:

$$\begin{aligned}
M_1 &= \{(x, y) \mid x, y \in \mathbb{N}_0 \land x + y = 7\} \\
M_2 &= \{x \mid x \in \mathcal{P}(\mathbb{N}_0) \land |x| = 1\} \\
M_3 &= \{x \mid x \in \mathbb{R} \land x^2 < 1\} \\
M_4 &= \{x \mid \exists y \in \mathcal{P}(\{1, 2, 3\}), x \cup y = \{1, 3, 4\}\}
\end{aligned}$$