# Tableaux-Beweise in der Aussagenlogik

- Wie kann man auf syntaktische Weise eine Belegung mit Wahrheitswerten finden, die einen gegebenen Ausdruck wahr oder falsch macht?

- Die Frage schliesst Beweise durch Widerspruch – keine Belegung existiert – mit ein, ist aber allgemeiner.

- Frage kann mit Hilfe von (analytischen / semantischen) Tableaux beantwortet werden

# Einführung

- Wie können wir zeigen, dass der aussagenlogische Ausdruck

  $P \vee \neg P$

  eine Tautologie ist?

- Wahrheitstabellen sind unpraktikabel, da sie exponentiell wachsen

- stattdessen versuchen wir, die Aussage mit Hilfe von Tableaux syntaktisch zu falsifizieren

- Notation:

  signierter Ausdruck F P bedeutet, dass wir versuchen, den (unsignierten) Ausdruck P als falsch nachzuweisen

  signierter Ausdruck T P bedeutet, dass wir versuchen, den (unsignierten) Ausdruck P als wahr nachzuweisen

# Beispiel 1

- wir beginnen ein Tableau

  | | | | |
  |---|---|---|---|
  | 1 | $F\ (p \vee \neg\ p)$ | | |

  das wir im Folgenden durch Expansionsregeln erweitern

- Expansionsregel $F_\vee$: eine Disjunktion ist falsch, wenn beide Disjunkte falsch sind

  | | | | |
  |---|---|---|---|
  | 1 | $F\ (p \vee \neg\ p)$ | | √ |
  | 2 | $F\ p$ | $1, F_\vee$ | |
  | 3 | $F\ (\neg\ p)$ | $1, F_\vee$ | |

- Notation

  √ bedeutet, dass die entsprechende Zeile expandiert wurde

  $1, F_\vee$ bedeutet, dass die entsprechende Zeile aus der Zeile 1 unter Anwendung der Expansionsregel $F_\vee$ entstand

- Expansionsregel $F_\neg$: eine Negation ist falsch, wenn die negierte Aussage wahr ist

  | | | | |
  |---|---|---|---|
  | 1 | $F\ (p \vee \neg\ p)$ | | √ |
  | 2 | $F\ p$ | $1, F_\vee$ | |
  | 3 | $F\ (\neg\ p)$ | $1, F_\vee$ | √ |
  | 4 | $T\ p$ | $3, F_\neg$ | |

# Beispiel 1

- weitere Expansion ist nicht möglich, da alle signierten Aussagen atomar sind
- Tableau enthält die signierten Audrücke F p und T p, die verlangen, dass wir p gleichzeitig wahr und falsch machen, d.h. einen Widerspruch; ein solches Tableau wird geschlossen genannt
- F $(p \vee \neg p)$ schlägt daher fehl, d.h. $p \vee \neg p$ ist eine Tautologie

# Beispiel 2

- Ist der aussagenlogische Ausdruck

  $\neg (q \wedge r) \rightarrow (\neg q \vee \neg r)$

  eine Tautologie?

- Tableau

| | | | |
|---|---|---|---|
| 1 | $F \neg (q \wedge r) \rightarrow (\neg q \vee \neg r)$ | | |

- Expansionsregel $F_{\rightarrow}$: eine Implikation ist falsch, wenn die Vorbedingung wahr und die Konsequenz falsch ist

| | | | |
|---|---|---|---|
| 1 | $F \neg (q \wedge r) \rightarrow (\neg q \vee \neg r)$ | | √ |
| 2 | $T \neg (q \wedge r)$ | 1, $F_{\rightarrow}$ | |
| 3 | $F (\neg q \vee \neg r)$ | 1, $F_{\rightarrow}$ | |

- weitere Expansion von Zeile 3 mit $F_{\vee}$

| | | | |
|---|---|---|---|
| 1 | $F \neg (q \wedge r) \rightarrow (\neg q \vee \neg r)$ | | √ |
| 2 | $T \neg (q \wedge r)$ | 1, $F_{\rightarrow}$ | |
| 3 | $F (\neg q \vee \neg r)$ | 1, $F_{\rightarrow}$ | √ |
| 4 | $F \neg q$ | 3, $F_{\vee}$ | |
| 5 | $F \neg r$ | 3, $F_{\vee}$ | |

  (Zeilen müssen nicht notwendigerweise in der textuellen Reihenfolge expandiert werden.)

# Beispiel 2

- weitere Expansion mit $F_{\neg}$

| | | | |
|---|---|---|---|
| 1 | $F \neg (q \wedge r) \rightarrow (\neg q \vee \neg r)$ | | $\surd$ |
| 2 | $T \neg (q \wedge r)$ | 1, $F_{\rightarrow}$ | |
| 3 | $F (\neg q \vee \neg r)$ | 1, $F_{\rightarrow}$ | $\surd$ |
| 4 | $F \neg q$ | 3, $F_{\vee}$ | $\surd$ |
| 5 | $F \neg r$ | 3, $F_{\vee}$ | $\surd$ |
| 6 | $T q$ | 4, $F_{\neg}$ | |
| 7 | $T r$ | 5, $F_{\neg}$ | |

- Expansionsregel $T_{\neg}$: eine Negation ist wahr, wenn die negierte Aussage falsch ist

| | | | |
|---|---|---|---|
| 1 | $F \neg (q \wedge r) \rightarrow (\neg q \vee \neg r)$ | | $\surd$ |
| 2 | $T \neg (q \wedge r)$ | 1, $F_{\rightarrow}$ | $\surd$ |
| 3 | $F (\neg q \vee \neg r)$ | 1, $F_{\rightarrow}$ | $\surd$ |
| 4 | $F \neg q$ | 3, $F_{\vee}$ | $\surd$ |
| 5 | $F \neg r$ | 3, $F_{\vee}$ | $\surd$ |
| 6 | $T q$ | 4, $F_{\neg}$ | |
| 7 | $T r$ | 5, $F_{\neg}$ | |
| 8 | $F (q \wedge r)$ | 2, $T_{\neg}$ | |

# Beispiel 2

- Zeile 8 enthält F ($q \wedge r$); eine Konjunktion ist falsch, wenn mindestens ein Konjunkt falsch ist, d.h. wir müssen beide Fälle untersuchen und erhalten damit zwei Zweige im Tableau
- Expansionsregel $F_\wedge$: eine Konjunktion ist falsch, wenn mindestens ein Konjunkt falsch ist

| | | | |
|---|---|---|---|
| 1 | $F \neg (q \wedge r) \rightarrow (\neg q \vee \neg r)$ | | √ |
| 2 | $T \neg (q \wedge r)$ | 1, $F_\rightarrow$ | √ |
| 3 | $F (\neg q \vee \neg r)$ | 1, $F_\rightarrow$ | √ |
| 4 | $F \neg q$ | 3, $F_\vee$ | √ |
| 5 | $F \neg r$ | 3, $F_\vee$ | √ |
| 6 | $T q$ | 4, $F_\neg$ | |
| 7 | $T r$ | 5, $F_\neg$ | |
| 8 | $F (q \wedge r)$ | 2, $T_\neg$ | √ |

9 $F q$ 8, $F_\wedge$      10 $F r$ 8, $F_\wedge$

# Beispiel 2

- weitere Expansion ist nicht möglich
- Tableau ist geschlossen, denn beide Zweige enthalten einen Widerspruch (T q / Fq, bzw. T r / F r)
- Ausdruck $\neg (q \wedge r) \rightarrow (\neg q \vee \neg r)$ kann nicht falsifiziert werden und ist somit eine Tautologie

# Beispiel 3

- Der aussagenlogische Ausdruck

  $(p \land q) \rightarrow (r \lor s)$

  ist keine Tautologie. Was liefert der Tableau-Beweis?

- Tableau

| | | | |
|---|---|---|---|
| 1 | $F\ (p \land q) \rightarrow (r \lor s)$ | | √ |
| 2 | $T\ (p \land q)$ | $1, F_{\rightarrow}$ | |
| 3 | $F\ (r \lor s)$ | $1, F_{\rightarrow}$ | |

- Expansionsregel $T_{\land}$: eine Konjunktion ist wahr, wenn beide Konjunkte wahr sind

| | | | |
|---|---|---|---|
| 1 | $F\ (p \land q) \rightarrow (r \lor s)$ | | √ |
| 2 | $T\ (p \land q)$ | $1, F_{\rightarrow}$ | √ |
| 3 | $F\ (r \lor s)$ | $1, F_{\rightarrow}$ | |
| 4 | $T\ p$ | $2, T_{\land}$ | |
| 5 | $T\ q$ | $2, T_{\land}$ | |

# Beispiel 3

- weitere Expansion mit $F_{\vee}$

| | | | |
|---|---|---|---|
| 1 | $F\ (p \wedge q) \rightarrow (r \vee s)$ | | √ |
| 2 | $T\ (p \wedge q)$ | 1, $F_{\rightarrow}$ | √ |
| 3 | $F\ (r \vee s)$ | 1, $F_{\rightarrow}$ | √ |
| 4 | $T\ p$ | 2, $T_{\wedge}$ | |
| 5 | $T\ q$ | 2, $T_{\wedge}$ | |
| 6 | $F\ r$ | 3, $F_{\vee}$ | |
| 7 | $F\ s$ | 3, $F_{\vee}$ | |

- weitere Expansion ist nicht möglich
- wir erhalten kein geschlossenenes Tableau
- stattdessen erhalten wir die Instruktionen (= Wahrheitsbelegungen) T p, T q, F r und F s, um den Ausdruck $(p \wedge q) \rightarrow (r \vee s)$ zu falsifizieren

# Tableau Expansionsregeln

- unäre Regeln (P ist ein aussagenlogischer Ausdruck)

| | |
|---|---|
| T ¬ P | F ¬ P |
| ------- | ------- |
| F P | T P |

(Der signierte Ausdruck über dem Strich wird bei Anwendung der Expansionsregel durch den signierten Ausdruck unter dem Strich ersetzt.)

- binäre konjunktive Regeln verlängern Zweige (P und Q sind aussagenlogische Ausdrücke)

$$\frac{T\ (P \wedge Q)}{\begin{array}{c} T\ P \\ T\ Q \end{array}}$$

$$\frac{F\ (P \vee Q)}{\begin{array}{c} F\ P \\ F\ Q \end{array}}$$

$$\frac{F\ (P \rightarrow Q)}{\begin{array}{c} T\ P \\ F\ Q \end{array}}$$

# Tableau Expansionsregeln

- binäre disjunktive Regeln ergeben Verzweigungen (P und Q sind aussagenlogische Ausdrücke)

  F $(P \wedge Q)$
  ------------
  F P | F Q

  T $(P \vee Q)$
  ------------
  T P | T Q

  T $(P \rightarrow Q)$
  ------------
  F P | T Q

# Tableaux

- Ein Tableau ist ein Baum, dessen Knoten signierte Ausdrücke sind. Ein Zweig des Tableau ist der entsprechende Zweig des Baumes.
- Das Tableau wird durch Anwendungen von Expansionsregeln auf noch nicht expandierte Knoten aufgebaut. Für jeden nichtexpandierten, nichtatomaren Knoten gibt es genau eine Expansionsregel.
- Konjunktive Expansionsregeln verlängern den entsprechenden Zweig, disjunktive Expansionsregeln führen eine Verzweigung jedes Zweiges ein, der den expandierten Knoten enthält.
- Jedes Tableau ist nach endlich vielen Schritten vollständig expandiert.
- Ein Tableau heisst geschlossen, wenn jeder Zweig geschlossen ist, d.h. eine atomare Aussage enthält, die gleichzeitig wahr und falsch sein soll.
- Eine Aussage P ist durch ein Tableau beweisbar, wenn die signierte Aussage F P zu einem geschlossenen Tableau führt.
- Tableaux-Beweise sind korrekt und vollständig.

# Erweiterungen

- Um zu beweisen, dass ein Ausdruck P aus einer Menge $\{M_1, \ldots, M_n\}$ von Ausdrücken folgt, verwenden wir das Deduktionstheorem

  $\{M_1, \ldots, M_n\} \vdash P$ genau dann, wenn $\vdash \{M_1, \ldots, M_n\} \rightarrow P$

  Wenn wir $\vdash \{M_1, \ldots, M_n\} \rightarrow P$ durch ein Tableau beweisen können, dann folgt daraus $\{M_1, \ldots, M_n\} \vdash P$

- Direkter Beweis: um zu zeigen, dass ein Ausdruck P aus einer Menge $\{M_1, \ldots, M_n\}$ von Ausdrücken folgt, beginnen wir mit dem Tableau

  T $M_1$

  …

  T $M_n$

  F P

  Wenn dieser Beweis durch Widerspruch misslingt, dann gilt $\{M_1, \ldots, M_n\} \vdash P$.

# Erweiterungen

- Tableau können auch Wahrheitsbelegungen generieren
- Wie wird der Ausdruck

  $\neg p \wedge (r \vee q)$

  wahr?
- Tableau

| | | | |
|---|---|---|---|
| 1 | $T \neg p \wedge (r \vee q)$ | | $\surd$ |
| 2 | $T \neg p$ | 1, $T_{\wedge}$ | $\surd$ |
| 3 | $T (r \vee q)$ | 1, $T_{\wedge}$ | $\surd$ |
| 4 | $F\ p$ | 2, $T\neg$ | |

| | | | |
|---|---|---|---|
| 5 T r | 3, $T\vee$ | 6 T q | 3, $T\vee$ |

- Ausdruck $\neg p \wedge (r \vee q)$ ist wahr, wenn p falsch und r wahr sind, oder aber wenn p falsch und q wahr sind.

# Schlussbemerkungen

- Tableaux können durch Expansionregeln für Quantoren auch für die Prädikatenlogik verwendet werden; alle Ergebnisse gelten entsprechend
- Expansionsregeln für Quantoren führen zu praktischen Schwierigkeiten, die auf verschiedene Weise gelöst werden und Varianten des Verfahrens ergeben
- Tableaux können manuell verwendet und auch effizient auf dem Computer implementiert werden
- heuristische Regeln: immer zuerst konjunktive Expansionsregeln verwenden und dann erst die disjunktiven, die zu Verzweigungen des Baumes führen
- Tableaux können auch mit unsignierten Ausdrücken arbeiten

  Anstelle von T P schreibt man P.

  Anstelle von F P schreibt man $\neg$ P.