

Tableaux-Beweise in der Aussagenlogik

- Wie kann man auf syntaktische Weise eine Belegung mit Wahrheitswerten finden, die einen gegebenen Ausdruck wahr oder falsch macht?
- Die Frage schliesst Beweise durch Widerspruch – keine Belegung existiert – mit ein, ist aber allgemeiner.
- Frage kann mit Hilfe von (analytischen/semantischen) Tableaux beantwortet werden

Deduktion: Tableaux 1

Beispiel 1

- wir beginnen ein Tableau
 - 1 $F(p \vee \neg p)$
 das wir im Folgenden durch Expansionsregeln erweitern
- Expansionsregel F_{\vee} : eine Disjunktion ist falsch, wenn beide Disjunkte falsch sind
 - 1 $F(p \vee \neg p)$ \checkmark
 - 2 $F p$ 1, F_{\vee}
 - 3 $F(\neg p)$ 1, F_{\vee}
- Notation

\checkmark bedeutet, dass die entsprechende Zeile expandiert wurde

1, F_{\vee} bedeutet, dass die entsprechende Zeile aus der Zeile 1 unter Anwendung der Expansionsregel F_{\vee} entstand
- Expansionsregel F_{\neg} : eine Negation ist falsch, wenn die negierte Aussage wahr ist
 - 1 $F(p \vee \neg p)$ \checkmark
 - 2 $F p$ 1, F_{\vee}
 - 3 $F(\neg p)$ 1, F_{\vee} \checkmark
 - 4 $T p$ 3, F_{\neg}

Deduktion: Tableaux 3

Einführung

- Wie können wir zeigen, dass der aussagenlogische Ausdruck

$$P \vee \neg P$$
 eine Tautologie ist?
- Wahrheitstabellen sind unpraktikabel, da sie exponentiell wachsen
- stattdessen versuchen wir, die Aussage mit Hilfe von Tableaux syntaktisch zu falsifizieren
- Notation:

signierter Ausdruck $F P$ bedeutet, dass wir versuchen, den (unsignierten) Ausdruck P als falsch nachzuweisen

signierter Ausdruck $T P$ bedeutet, dass wir versuchen, den (unsignierten) Ausdruck P als wahr nachzuweisen

Deduktion: Tableaux 2

Beispiel 1

- weitere Expansion ist nicht möglich, da alle signierten Aussagen atomar sind
- Tableau enthält die signierten Ausdrücke $F p$ und $T p$, die verlangen, dass wir p gleichzeitig wahr und falsch machen, d.h. einen Widerspruch; ein solches Tableau wird geschlossen genannt
- $F(p \vee \neg p)$ schlägt daher fehl, d.h. $p \vee \neg p$ ist eine Tautologie

Deduktion: Tableaux 4

Beispiel 2

- Ist der aussagenlogische Ausdruck

$$\neg (q \wedge r) \rightarrow (\neg q \vee \neg r)$$

eine Tautologie?

- Tableau

$$1 \quad F \neg (q \wedge r) \rightarrow (\neg q \vee \neg r)$$

- Expansionsregel F_{\rightarrow} : eine Implikation ist falsch, wenn die Vorbedingung wahr und die Konsequenz falsch ist

$$1 \quad F \neg (q \wedge r) \rightarrow (\neg q \vee \neg r) \quad \checkmark$$

$$2 \quad T \neg (q \wedge r) \quad 1, F_{\rightarrow}$$

$$3 \quad F (\neg q \vee \neg r) \quad 1, F_{\rightarrow}$$

- weitere Expansion von Zeile 3 mit F_{\vee}

$$1 \quad F \neg (q \wedge r) \rightarrow (\neg q \vee \neg r) \quad \checkmark$$

$$2 \quad T \neg (q \wedge r) \quad 1, F_{\rightarrow}$$

$$3 \quad F (\neg q \vee \neg r) \quad 1, F_{\rightarrow} \quad \checkmark$$

$$4 \quad F \neg q \quad 3, F_{\vee}$$

$$5 \quad F \neg r \quad 3, F_{\vee}$$

(Zeilen müssen nicht notwendigerweise in der textuellen Reihenfolge expandiert werden.)

Deduktion: Tableaux 5

Beispiel 2

- weitere Expansion mit F_{\neg}

$$1 \quad F \neg (q \wedge r) \rightarrow (\neg q \vee \neg r) \quad \checkmark$$

$$2 \quad T \neg (q \wedge r) \quad 1, F_{\rightarrow}$$

$$3 \quad F (\neg q \vee \neg r) \quad 1, F_{\rightarrow} \quad \checkmark$$

$$4 \quad F \neg q \quad 3, F_{\vee} \quad \checkmark$$

$$5 \quad F \neg r \quad 3, F_{\vee} \quad \checkmark$$

$$6 \quad T q \quad 4, F_{\neg}$$

$$7 \quad T r \quad 5, F_{\neg}$$

- Expansionsregel T_{\neg} : eine Negation ist wahr, wenn die negierte Aussage falsch ist

$$1 \quad F \neg (q \wedge r) \rightarrow (\neg q \vee \neg r) \quad \checkmark$$

$$2 \quad T \neg (q \wedge r) \quad 1, F_{\rightarrow} \quad \checkmark$$

$$3 \quad F (\neg q \vee \neg r) \quad 1, F_{\rightarrow} \quad \checkmark$$

$$4 \quad F \neg q \quad 3, F_{\vee} \quad \checkmark$$

$$5 \quad F \neg r \quad 3, F_{\vee} \quad \checkmark$$

$$6 \quad T q \quad 4, F_{\neg}$$

$$7 \quad T r \quad 5, F_{\neg}$$

$$8 \quad F (q \wedge r) \quad 2, T_{\neg}$$

Deduktion: Tableaux 6

Beispiel 2

- Zeile 8 enthält $F (q \wedge r)$; eine Konjunktion ist falsch, wenn mindestens ein Konjunkt falsch ist, d.h. wir müssen beide Fälle untersuchen und erhalten damit zwei Zweige im Tableau

- Expansionsregel F_{\wedge} : eine Konjunktion ist falsch, wenn mindestens ein Konjunkt falsch ist

$$1 \quad F \neg (q \wedge r) \rightarrow (\neg q \vee \neg r) \quad \checkmark$$

$$2 \quad T \neg (q \wedge r) \quad 1, F_{\rightarrow} \quad \checkmark$$

$$3 \quad F (\neg q \vee \neg r) \quad 1, F_{\rightarrow} \quad \checkmark$$

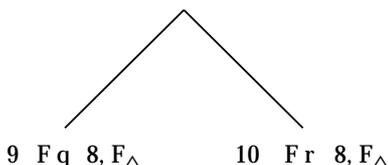
$$4 \quad F \neg q \quad 3, F_{\vee} \quad \checkmark$$

$$5 \quad F \neg r \quad 3, F_{\vee} \quad \checkmark$$

$$6 \quad T q \quad 4, F_{\neg}$$

$$7 \quad T r \quad 5, F_{\neg}$$

$$8 \quad F (q \wedge r) \quad 2, T_{\neg} \quad \checkmark$$



Deduktion: Tableaux 7

Beispiel 2

- weitere Expansion ist nicht möglich

- Tableau ist geschlossen, denn beide Zweige enthalten einen Widerspruch ($T q/Fq$, bzw. $T r/Fr$)

- Ausdruck $\neg (q \wedge r) \rightarrow (\neg q \vee \neg r)$ kann nicht falsifiziert werden und ist somit eine Tautologie

Deduktion: Tableaux 8

Beispiel 3

- Der aussagenlogische Ausdruck

$$(p \wedge q) \rightarrow (r \vee s)$$

ist keine Tautologie. Was liefert der Tableau-Beweis?

- Tableau

1	$F (p \wedge q) \rightarrow (r \vee s)$		√
2	$T (p \wedge q)$	1, $F \rightarrow$	
3	$F (r \vee s)$	1, $F \rightarrow$	

- Expansionsregel T_{\wedge} : eine Konjunktion ist wahr, wenn beide Konjunkte wahr sind

1	$F (p \wedge q) \rightarrow (r \vee s)$		√
2	$T (p \wedge q)$	1, $F \rightarrow$	√
3	$F (r \vee s)$	1, $F \rightarrow$	
4	$T p$	2, T_{\wedge}	
5	$T q$	2, T_{\wedge}	

Deduktion: Tableaux 9

Deduktion: Tableaux 10

Tableau Expansionsregeln

- unäre Regeln (P ist ein aussagenlogischer Ausdruck)

$\frac{T \neg P}{F P}$	$\frac{F \neg P}{T P}$
------------------------	------------------------

(Der signierte Ausdruck über dem Strich wird bei Anwendung der Expansionsregel durch den signierten Ausdruck unter dem Strich ersetzt.)

- binäre konjunktive Regeln verlängern Zweige (P und Q sind aussagenlogische Ausdrücke)

$$\frac{T (P \wedge Q)}{T P \quad T Q}$$

$$\frac{F (P \vee Q)}{F P \quad F Q}$$

$$\frac{F (P \rightarrow Q)}{T P \quad F Q}$$

Deduktion: Tableaux 11

Deduktion: Tableaux 12

Beispiel 3

- weitere Expansion mit F_{\vee}

1	$F (p \wedge q) \rightarrow (r \vee s)$		√
2	$T (p \wedge q)$	1, $F \rightarrow$	√
3	$F (r \vee s)$	1, $F \rightarrow$	√
4	$T p$	2, T_{\wedge}	
5	$T q$	2, T_{\wedge}	
6	$F r$	3, F_{\vee}	
7	$F s$	3, F_{\vee}	

- weitere Expansion ist nicht möglich

- wir erhalten kein geschlossenes Tableau

- stattdessen erhalten wir die Instruktionen (= Wahrheitsbelegungen) $T p$, $T q$, $F r$ und $F s$, um den Ausdruck $(p \wedge q) \rightarrow (r \vee s)$ zu falsifizieren

Tableau Expansionsregeln

- binäre disjunktive Regeln ergeben Verzweigungen (P und Q sind aussagenlogische Ausdrücke)

$$\frac{F (P \wedge Q)}{F P \mid F Q}$$

$$\frac{T (P \vee Q)}{T P \mid T Q}$$

$$\frac{T (P \rightarrow Q)}{F P \mid T Q}$$

Tableaux

- Ein Tableau ist ein Baum, dessen Knoten signierte Ausdrücke sind. Ein Zweig des Tableau ist der entsprechende Zweig des Baumes.
- Das Tableau wird durch Anwendungen von Expansionsregeln auf noch nicht expandierte Knoten aufgebaut. Für jeden nichtexpandierten, nichtatomaren Knoten gibt es genau eine Expansionsregel.
- Konjunktive Expansionsregeln verlängern den entsprechenden Zweig, disjunktive Expansionsregeln führen eine Verzweigung jedes Zweiges ein, der den expandierten Knoten enthält.
- Jedes Tableau ist nach endlich vielen Schritten vollständig expandiert.
- Ein Tableau heisst geschlossen, wenn jeder Zweig geschlossen ist, d.h. eine atomare Aussage enthält, die gleichzeitig wahr und falsch sein soll.
- Eine Aussage P ist durch ein Tableau beweisbar, wenn die signierte Aussage F P zu einem geschlossenen Tableau führt.
- Tableaux-Beweise sind korrekt und vollständig.

Deduktion: Tableaux 13

Erweiterungen

- Tableau können auch Wahrheitsbelegungen generieren
- Wie wird der Ausdruck $\neg p \wedge (r \vee q)$ wahr?
- Tableau

1	$T \neg p \wedge (r \vee q)$		✓
2	$T \neg p$	1, $T \wedge$	✓
3	$T (r \vee q)$	1, $T \wedge$	✓
4	$F p$	2, $T \neg$	
5 $T r$	3, $T \vee$	6 $T q$	3, $T \vee$
- Ausdruck $\neg p \wedge (r \vee q)$ ist wahr, wenn p falsch und r wahr sind, oder aber wenn p falsch und q wahr sind.

Deduktion: Tableaux 15

Erweiterungen

- Um zu beweisen, dass ein Ausdruck P aus einer Menge $\{M_1, \dots, M_n\}$ von Ausdrücken folgt, verwenden wir das Deduktionstheorem

$\{M_1, \dots, M_n\} \vdash P$ genau dann, wenn $\vdash \{M_1, \dots, M_n\} \rightarrow P$

Wenn wir $\vdash \{M_1, \dots, M_n\} \rightarrow P$ durch ein Tableau beweisen können, dann folgt daraus $\{M_1, \dots, M_n\} \vdash P$
- Direkter Beweis: um zu zeigen, dass ein Ausdruck P aus einer Menge $\{M_1, \dots, M_n\}$ von Ausdrücken folgt, beginnen wir mit dem Tableau

$T M_1$

...

$T M_n$

$F P$

Wenn dieser Beweis durch Widerspruch misslingt, dann gilt $\{M_1, \dots, M_n\} \vdash P$.

Deduktion: Tableaux 14

Schlussbemerkungen

- Tableaux können durch Expansionsregeln für Quantoren auch für die Prädikatenlogik verwendet werden; alle Ergebnisse gelten entsprechend
- Expansionsregeln für Quantoren führen zu praktischen Schwierigkeiten, die auf verschiedene Weise gelöst werden und Varianten des Verfahrens ergeben
- Tableaux können manuell verwendet und auch effizient auf dem Computer implementiert werden
- heuristische Regeln: immer zuerst konjunktive Expansionsregeln verwenden und dann erst die disjunktiven, die zu Verzweigungen des Baumes führen
- Tableaux können auch mit unsignierten Ausdrücken arbeiten

Anstelle von T P schreibt man P.

Anstelle von F P schreibt man $\neg P$.

Deduktion: Tableaux 16