Mengen

- Definition (Intuitive Mengenlehre)

  Eine Menge ist die Zusammenfassung von Elementen unserer Anschauung zu einem wohldefinierten Ganzen. (Georg Cantor)

- Notation

  1. Aufzählung aller Elemente: $\{ 1 , \{ 2 \} , \{ 3 , 4 \} , \{ 5 \} \}$
  2. Beschreibung der Eigenschaften der Elemente:
     $\{ x \mid x \bmod 2 = 0 \}$
     Informell wird auch geschrieben: $\{ 2, 4, 6, 8, \ldots \}$

- (Nicht-) Elemente einer Menge

  $\{ 3 , 4 \} \in \{ 1 , \{ 2 \} , \{ 3 , 4 \} , \{ 5 \} \}$

  $3 \notin \{ 1 , \{ 2 \} , \{ 3 , 4 \} , \{ 5 \} \}$

- Grundprinzipien

  Axiom der Extensionalität: *Zwei Mengen A und B sind genau dann gleich, wenn sie die gleichen Elemente enthalten.*

  $$A = B \Leftrightarrow (\ \forall x : x \in A \Leftrightarrow x \in B \ )$$

  $$\textit{Beispiel: } \{ 1 , 2 , 3 \} = \{ n \mid n \in \square \land n < 4 \}$$

  Axiom der Komprehension: *Für jede Eigenschaft können wir eine Menge bilden, die genau die Elemente enthält, die diese Eigenschaft haben.*

Eigenschaften

- Mengenzugehörigkeit

$$\forall x : (x \in \{ a_1, \ldots a_n \} \Leftrightarrow x = a_1 \lor \ldots \lor x = a_n)$$

$$\forall x : (x \in \{ y \mid P(y) \} \Leftrightarrow P(x))$$

- Teilmengen

*Die Menge T heisst eine **(unechte) Teilmenge** der Menge A, wenn jedes Element, das in der Teilmenge T liegt, auch in der Menge A liegt:*

$$T \subseteq A \Leftrightarrow (\forall x : x \in T \Rightarrow x \in A)$$

Beispiele: $\{ 2 \} \subseteq \{ 1 , 2 \}$ $\{ 1, 2 \} \subseteq \{ 1 , 2 \}$

*Die Menge T heisst eine **echte Teilmenge** der Menge A, wenn T eine Teilmenge von A, aber nicht gleich A ist:*

$$T \subset A \Leftrightarrow (\forall x : x \in T \Rightarrow x \in A) \land T \neq A$$

Beispiel: $\{ 2 \} \subset \{ 1 , 2 \}$

Prominente Mengen

- $\mathbb{N}$ = Menge der natürlichen Zahlen ohne 0

$$\mathbb{N} = \{ 1 , 2 , 3 ,\ldots\}$$

- $\mathbb{N}_0$ = Menge der natürlichen Zahlen einschliesslich 0

$$\mathbb{N}_0 = \{ 0, 1 , 2 , 3 ,\ldots\}$$

- $\mathbb{Z}$ = Menge der ganzen Zahlen

$$\mathbb{Z} = \{ 0 , 1 , -1 , 2 , -2 , 3 , -3 ,\ldots\}$$

- $\mathbb{Q}$ = Menge der rationalen Zahlen

$$\mathbb{Q} = \{ a / b \mid a \in \mathbb{Z} \wedge b \in \mathbb{N} \}$$

- $\mathbb{R}$ = Menge der reellen Zahlen

- $\mathbb{C}$ = Menge der komplexen Zahlen

Spezielle Mengen (1)

- Durchschnittsmenge

  *Der **Durchschnitt** zweier Mengen A und B ist die Menge aller Elemente, die sowohl in A als auch in B enthalten sind.*

  $$A \cap B = \{ x \mid x \in A \wedge x \in B \}$$

- Vereinigungsmenge

  *Die **Vereinigung** zweier Mengen A und B ist die Menge aller Elemente, die in A oder in B enthalten sind.*

  $$A \cup B = \{ x \mid x \in A \vee x \in B \}$$

- Leere Menge

  *Die **leere Menge** ist die Menge, die kein Element enthält. Sie wird $\varnothing$ oder {} geschrieben:*

  $$\varnothing = \{ x \mid x \neq x \} \text{ oder } \forall x : x \notin \varnothing$$

- Komplementärmenge

  *Ist eine Grundmenge G und eine Menge A mit $A \subseteq G$ gegen, so ist die **Komplementärmenge** A^c definiert durch:*

  $$A^c = \{ x \mid x \notin A \wedge x \in G \}$$

Spezielle Mengen (2)

- Potenzmenge

Sei A eine Menge. Die Potenzmenge einer beliebigen Menge A ist die Menge $\mathcal{P}(A)$ aller Teilmengen von A.

$$\mathcal{P}(A) = \{ U \mid U \subseteq A \}$$

Beispiel: $\mathcal{P}(\{1, 2\}) = \{ \emptyset, \{1\}, \{2\}, \{1, 2\} \}$

- Differenzmenge

Seien A und B beliebige Mengen. Die ***Differenz*** *A – B, gesprochen A minus B, ist die Menge aller Elemente, die in A aber nicht in B liegen.*

$$A - B = \{ x \mid x \in A \wedge x \notin B \}$$

Beispiel: $\{1, 2, 3\} - \{3, 4\} = \{1, 2\}$

- Symmetrische Differenzmenge

Die ***symmetrische Differenz*** *zweier Mengen A und B ist die Menge $A \oplus B$ aller Elemente, die genau in einer der beiden Mengen liegen.*

$$A \oplus B = (A \cup B) - (A \cap B)$$

Beispiel: $\{1, 2, 3\} \oplus \{3, 4\} = \{1, 2, 4\}$

Weitere Eigenschaften

- Kardinalität einer Menge

  *Sei A eine Menge mit endlich vielen Elementen. Die Anzahl $|A|$ nennt man die **Mächtigkeit** oder **Kardinalität** der Menge.*

  Zwei endliche Mengen haben dieselbe Kardinalität, wenn die Anzahl Elemente in beiden Mengen gleich ist.

  Die Kardinalität von unendlichen Mengen wird später definiert.

- Disjunktheit

  *Zwei Mengen A und B heissen **disjunkt**, wenn ihr Durchschnitt leer ist.*

$$A \cap B = \emptyset$$

- Paarweise Disjunktheit

  *Eine Menge X von Mengen heisst **paarweise disjunkt**, wenn der Durchschnitt von jedem Paar von Mengen leer ist.*

$$\forall A, B \in X : A \neq B \Rightarrow A \cap B = \emptyset$$

Familien von Mengen

- Familie von Mengen

  Menge M von Mengen A_i, die durch eine Indexmenge I indiziert sind:

  $\forall i : i \in I \Rightarrow \exists A_i \in M$

- Vereinigung

  $\bigcup M = \bigcup_{i \in I} A_i = \{ x \mid \exists i \in I : x \in A_i \}$

- Durchschnitt

  $\bigcap M = \bigcap_{i \in I} A_i = \{ x \mid \forall i \in I : x \in A_i \}$

Mengengesetze

Idempotenz	$A \cap A = A$	$A \cup A = A$
Kommutativität	$A \cap B = B \cap A$	$A \cup B = B \cup A$
Assoziativität	$(A \cap B) \cap C =$ $A \cap (B \cap C)$	$(A \cup B) \cup C =$ $A \cup (B \cup C)$
Distributivität	$A \cap (B \cup C) =$ $(A \cap B) \cup (A \cap C)$	$A \cup (B \cap C) =$ $(A \cup B) \cap (A \cup C)$
Absorption	$A \cap (A \cup B) = A$	$A \cup (A \cap B) = A$
Reflexivität	$A \subseteq A$	$A \supseteq A$
Kontraktion	$(A \cap B) \subseteq A$	$(A \cup B) \supseteq A$
Monotonie	$A \subseteq B \Rightarrow$ $A \cap C \subseteq B \cap C$	$A \supseteq B \Rightarrow$ $A \cup C \supseteq B \cup C$

Existiert eine Grundmenge G mit $A,B \subseteq G$, so gelten ferner:

Neutrale Elemente	$A \cap G = A$	$A \cup \emptyset = A$
Invariable Elemente	$A \cap \emptyset = \emptyset$	$A \cup G = G$
Extremalität	$\emptyset \subseteq A$	$G \supseteq A$
De Morgansche Regeln	$(A \cap B)^c = A^c \cup B^c$	$(A \cup B)^c = A^c \cap B^c$
Komplement	$A^c \cup A = G$	$A^c \cap A = \emptyset$

Beweise in der Mengenlehre

- Venn Diagramme: graphische Veranschaulichung; allenfalls mit Fallunterscheidungen (Tableau-Methode)
- Direkter Beweis durch Anwendung von Definitionen, Axiomen und Gesetzen.
- Indirekter Beweis durch Negation der Aussage und Angabe eines Gegenbeispiels.
- Um $A = B$ zu beweisen, beweise man $A \subseteq B$ und $B \subseteq A$.
- Transfer Methode: Eine mengentheoretische Formel wird in eine äquivalente aussagenlogische Formel umgewandelt, die dann bewiesen wird. Diese Methode beruht auf der Verwandtschaft zwischen Aussagenlogik und Mengenlehre, die damit zu tun hat, dass beide Systeme Boole'sche Algebren sind.

Mengenlehre	Aussagenlogik
$\cup$	$\vee$
$\subseteq$	$\Rightarrow$
$\cap$	$\wedge$
$\supseteq$	$\Leftarrow$

Direkter Beweis: ∅ ist Teilmenge jeder Menge

- Gegeben:

  1. $T \subseteq A \Leftrightarrow \forall x : x \in T \Rightarrow x \in A$

  2. $\forall x : x \notin \emptyset$

- Zu beweisen:

  $\emptyset \subseteq A$

- Beweis:

  $\emptyset \subseteq A \Leftrightarrow \forall x : x \in \emptyset \Rightarrow x \in A$ (1)

  $\emptyset \subseteq A \Leftrightarrow \forall x : \square \Rightarrow x \in A$ (2)

  $\emptyset \subseteq A \Leftrightarrow \top$ (3)

  (□ ist die immer falsche Aussage, ⊤ die immer wahre)

(1) Definition von ⊆, (2) Axiom für ∅, x ∈ ∅ ist für jedes x falsch, (3) □ ⇒ Q ist für jede Aussage Q wahr

Indirekter Beweis: ∅ ist nicht echte Teilmenge jeder Menge

- Gegeben:

  1. $T \square A \Leftrightarrow (\forall x : x \in T \Rightarrow x \in A) \wedge T \neq A$

  2. $\forall x : x \notin \emptyset$

- Zu beweisen:

$$\square (\emptyset \square A)$$

- Beweis:

  Annahme des Gegenteils: $\emptyset \square A$

  Gegenbeispiel: $A = \emptyset$

  Einsetzen in der Definition:

  $\emptyset \square \emptyset \Leftrightarrow (\forall x : x \in \emptyset \Rightarrow x \in \emptyset) \wedge \emptyset \neq \emptyset$

  $(\forall x : x \in \emptyset \Rightarrow x \in \emptyset) \wedge \emptyset \neq \emptyset$ *ist ein Widerspruch.*

Direkter Beweis:
$(A \cup B) - (A \cap B) = (A - B) \cup (B - A)$

- Gegeben: Die Definitionen von $\cap$, $\cup$, $-$, $\notin$, $\in$
- Beweis:

$$(A \cup B) - (B \cap A) =$$

$$\{ x \mid x \in A \vee x \in B \} - \{ x \mid x \in A \wedge x \in B \} = \quad (1)$$

$$\{ x \mid (x \in A \vee x \in B) \wedge \neg (x \in A \wedge x \in B) \} = \quad (2)$$

$$\{ x \mid (x \in A \vee x \in B) \wedge (x \notin A \vee x \notin B) \} = \quad (3)$$

$$\{ x \mid (x \in A \wedge x \notin A) \vee (x \in A \wedge x \notin B) \vee$$

$$(x \in B \wedge x \notin A) \vee (x \in B \wedge x \notin B) \} = \quad (4)$$

$$\{ x \mid (x \in A \wedge x \notin B) \vee (x \in B \wedge x \notin A) \} = \quad (5)$$

$$(A - B) \cup (B - A)$$

(1) Definitionen $\cap$, $\cup$, (2) Definition $-$, (3) Definition $\notin$ und $\in$, de Morgan, (4) Distributivität, (5) Vereinfachung, Definitionen $\cup$, $-$.

Geordnete Paare und n-Tupel

- Geordnete Paare

  (a , b) heisst das ***geordnete Paar*** *der Elemente a und b.*

- Gleichheit von Paaren

  Die Paare (a_1, b_1) *und* (a_2, b_2) *sind genau dann* ***gleich****, wenn*

  $a_1 = a_2 \wedge b_1 = b_2$

- n-Tupel

  $(a_1, \ldots, a_n)$ *heisst das geordnete* ***n-Tupel*** *der Elemente* a_1 *bis* a_n.

- Gleichheit von n-Tupeln

  Die n-Tupel $(a_1, \ldots, a_n)$ *und* $(b_1, \ldots, b_n)$ *sind genau dann* ***gleich****, wenn* $a_1 = b_1 \wedge \ldots \wedge a_n = b_n$.

Relationen

- Kartesisches Produkt

  *Das **kartesische Produkt** der beiden Mengen A und B ist die Menge $A \times B$ aller geordneten Paare (a , b) mit $a \in A$, $b \in B$.*

  $$A \times B = \{ (a , b) \mid a \in A \wedge b \in B \}$$

  Man schreibt $A^2 = A \times A$, $A^3 = A \times A \times A$, usw.

- Binäre Relationen

  *Sei A eine Menge. Eine **binäre Relation** R auf A ist eine Teilmenge des kartesischen Produkts der Menge A mit sich selbst.*

  $$R \subseteq A \times A$$

  *Seien A_1 und A_2 Mengen. Eine **binäre Relation** R auf $A_1 \times A_2$ ist eine Teilmenge des kartesischen Produkts $A_1 \times A_2$.*

  $$R \subseteq A_1 \times A_2$$

  ***Infixnotation:** Für $(a, b) \in R$ schreibt man auch aRb.*

- n-stellige Relationen

  *Seien $A_1, A_2, \ldots, A_n$ Mengen. Eine **n-stellige Relation** R auf $A_1, A_2, \ldots, A_n$ ist eine Teilmenge des kartesischen Produkts der Mengen $A_1, A_2, \ldots, A_n$.*

  $$R \subseteq A_1 \times A_2 \times \ldots \times A_n$$

Die 16 binären Relationen auf $A = \{1,2\}$

- $R_i \subseteq \{1,2\} \times \{1,2\}$

R_1	$\varnothing$	R_9	$\{(1,2),(2,1)\}$
R_2	$\{(1,1)\}$	R_{10}	$\{(1,2),(2,2)\}$
R_3	$\{(1,2)\}$	R_{11}	$\{(2,1),(2,2)\}$
R_4	$\{(2,1)\}$	R_{12}	$\{(1,1),(1,2),(2,1)\}$
R_5	$\{(2,2)\}$	R_{13}	$\{(1,1),(1,2),(2,2)\}$
R_6	$\{(1,1),(1,2)\}$	R_{14}	$\{(1,1),(2,1),(2,2)\}$
R_7	$\{(1,1),(2,1)\}$	R_{15}	$\{(1,2),(2,1),(2,2)\}$
R_8	$\{(1,1),(2,2)\}$	R_{16}	$\{(1,1),(1,2),(2,1),(2,2)\}$

Spezielle Relationen

- Umkehrrelation

  *Sei $R \subseteq A \times B$ eine Relation. Die **Umkehrrelation** zur Relation R ist die Relation $R^{-1} \subseteq B \times A$ mit*

  $$R^{-1} = \{ (b , a) \mid (a , b) \in R \}$$

- Komposition von Relationen

  *Seien $R_1 \subseteq A \times B$ und $R_2 \subseteq B \times C$ Relationen. Die **Komposition** $R_1 \circ R_2 \subseteq A \times C$ von R_1 und R_2 wird definiert durch*

  $$\forall\, a \in A, c \in C :$$

  $$(a , c) \in R_1 \circ R_2 \Leftrightarrow \exists\, b \in B : (a , b) \in R_1 \land (b , c) \in R_2$$

- Beispiel für Komposition von Relationen

  Programme können als Relationen ihrer Eingabe- und Ausgabewerte verstanden werden. Die Hintereinanderausführung von zwei Programmen entspricht dann der Komposition der entsprechenden Relationen.

Eigenschaften von Relationen

Eine Relation $R \subseteq A \times B$ ist

- **Linkstotal**: Jedes Element $a \in A$ tritt in mindestens einem Paar $(a, b) \in R$ links auf.

$$\forall a \in A : \exists\, b \in B : (a, b) \in R$$

- **Rechtstotal:** Jedes Element $b \in B$ tritt in mindestens einem Paar $(a, b) \in R$ rechts auf.

$$\forall\, b \in B : \exists\, a \in A : (a, b) \in R$$

- **Linkseindeutig**: Für ein $b \in B$ zu dem es ein $a \in A$ gibt mit $(a, b) \in R$ ist dieses linke a eindeutig.

$$\forall a_1, a_2 \in A : (\exists\, b \in B : (a_1, b) \in R \wedge (a_2, b) \in R) \Rightarrow$$

$$a_1 = a_2$$

- **Rechtseindeutig:** Für ein $a \in A$ zu dem es ein $b \in B$ gibt mit $(a, b) \in R$ ist dieses rechte b eindeutig.

$$\forall b_1, b_2 \in B : (\exists\, a \in A : (a, b_1) \in R \wedge (a, b_2) \in R) \Rightarrow$$

$$b_1 = b_2$$

Beispiel: Ein/Ausgabe Relation von Programmen

```
INTEGER A
READ (A)
WHILE (A <> 0) DO { A := A - 2 }
WRITE (A)
```

- Datentyp INTEGER: beliebig grosse ganze Zahlen
- Ein/Ausgabe Relation: $R \subseteq \mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$ mit $(x, y) \in R$ genau dann, wenn das Programm auf die Eingabe von x mit der Ausgabe von y reagiert.

Ist das Programm linkstotal, rechtstotal, linkseindeutig, rechtseindeutig?

Eigenschaften von binären Relationen

Eine binäre Relation $R \subseteq X \times X$ heisst

- **Reflexiv**: Jedes Element x steht zu sich selber in Relation.

$$\forall x \in X : (x, x) \in R$$

- **Irreflexiv**: Kein Element steht zu sich selber in Relation.

$$\forall x \in X : (x, x) \notin R$$

- **Symmetrisch**: Zu jedem Paar in der Relation ist auch das gespiegelte Paar in der Relation.

$$\forall x, y \in X : (x, y) \in R \Rightarrow (y, x) \in R$$

- **Antisymmetrisch (identitiv):** Zu jedem Paar in der Relation ist das gespiegelte Paar nur dann in der Relation, wenn die Elemente gleich sind.

$$\forall x, y \in X : (x, y) \in R \wedge (y, x) \in R \Rightarrow x = y$$

- **Asymmetrisch**: Zu jedem Paar in der Relation ist das gespiegelte Paar nicht in der Relation.

$$\forall x, y \in X : (x, y) \in R \Rightarrow (y, x) \notin R$$

- **Transitiv**:

$$\forall x, y, z \in X : (x, y) \in R \wedge (y, z) \in R \Rightarrow (x, z) \in R$$

Äquivalenzrelationen

- Eine **Äquivalenzrelation** auf einer Menge M ist eine binäre Relation $\sim \subseteq M \times M$ die reflexiv, symmetrisch und transitiv ist.

- Gleichheit ("=") ist die prototypische Äquivalenzrelation.

- **Partition**: Sei M eine Menge. Eine Partition von M ist eine Menge P von Teilmengen von M, also $P \subseteq \mathcal{P}(M)$, für die die folgenden Eigenschaften gelten:

  1. Keine Teilmenge der Partition ist leer.
  2. Die Teilmengen der Partition sind paarweise disjunkt.
  3. Die Vereinigung aller Teilmengen der Partition ist die Menge M.

- **Äquivalenzklassen**: Sei $\sim \subseteq M \times M$ eine Äquivalenzrelation. Zu jedem Element $m \in M$ heisst die Menge

$$(m)_{\sim} = \{ x \in M \mid x \sim m \}$$

  die von m erzeugte Äquivalenzklasse.

- Für jede Äquivalenzrelation $\sim$ auf einer Menge X bildet die Menge der Äquivalenzklassen von $\sim$ eine Partition $P_{\sim}$ von X.

Beispiel einer Äquivalenzrelation

- $a \equiv b$ modulo n – d.h. $a \in \mathbb{Z}$ und $b \in \mathbb{Z}$ geben bei der Division durch $n \in \mathbb{N}$ den gleichen Rest $r \in \mathbb{N}_0$ – definiert eine Äquivalenzrelation $\sim_m$ auf der Menge $\mathbb{Z}$

  $a = k_1 * n + r \quad b = k_2 * n + r \qquad (k_i \in \mathbb{Z}, r = 0, ..., n-1)$

  $a \sim_m b \Leftrightarrow a - b = k * n$

- Reflexivität

  $\forall a \in \mathbb{Z} : a \sim_m a \qquad (a - a = 0 * n)$

- Symmetrie

  $\forall a, b \in \mathbb{Z} : a \sim_m b \Rightarrow b \sim_m a \quad (a - b = k * n, b - a = - k * n)$

- Transitivität

  $\forall a, b, c \in \mathbb{Z} : a \sim_m b \wedge b \sim_m c \Rightarrow a \sim_m c$

  $(a - b = k_1 * n, b - c = k_2 * n, a - c = (k_1 + k_2) * n)$

Beispiel einer Äquivalenzrelation

- Die Menge aller Zahlen $a \in \mathbb{Z}$, die bei der Division durch $n \in \square$ den gleichen Rest $r \in \square_0$ ergeben, bilden eine Äquivalenzklasse $(r)_{\sim m}$. Da $r = 0, \ldots, n-1$, gibt es n Äquivalenzklassen.

  Für $n = 5$ erhalten wir

  $(0)_{\sim m} = \{ a \in \mathbb{Z} \mid a \sim_m 0\} = \{ \ldots, -10, -5, 0, 5, 10, \ldots\}$

  $(1)_{\sim m} = \{ a \in \mathbb{Z} \mid a \sim_m 1\} = \{ \ldots, -9, -4, 1, 6, 11, \ldots\}$

  $(2)_{\sim m} = \{ a \in \mathbb{Z} \mid a \sim_m 2\} = \{ \ldots, -8, -3, 2, 7, 12, \ldots\}$

  $(3)_{\sim m} = \{ a \in \mathbb{Z} \mid a \sim_m 3\} = \{ \ldots, -7, -2, 3, 8, 13, \ldots\}$

  $(4)_{\sim m} = \{ a \in \mathbb{Z} \mid a \sim_m 4\} = \{ \ldots, -6, -1, 4, 9, 14, \ldots\}$

- Die Menge der Äquivalenzklassen von $\sim_m$ bildet eine Partition von $\mathbb{Z}$, denn

  keine Äquivalenzklasse ist leer

  die Äquivalenzklassen sind paarweise disjunkt

  $(0)_{\sim m} \cup (1)_{\sim m} \cup (2)_{\sim} \cup (3)_{\sim m} \cup (4)_{\sim m} = \mathbb{Z}$

Weitere Beispiele von Äquivalenzrelationen

1. Sei X die Menge aller syntaktisch korrekten Pascal Programme, die einen Eingabewert lesen und entweder in eine Endlosschleife gehen oder einen Wert ausgeben. Welche der folgenden Relationen sind Äquivalenzrelationen?
   - $\sim_1 \subseteq X \times X$ mit $P \sim_1 Q$ genau dann, wenn P und Q für dieselben Eingabewerte dieselben Ausgabewerte erzeugen.
   - $\sim_2 \subseteq X \times X$ mit $P \sim_2 Q$ genau dann, wenn P und Q für dieselben Eingabewerte terminieren und dann auch dieselben Ausgabewerte ergeben.
2. Gegeben sei die Menge aller Menschen. Welche der folgenden Relationen sind Äquivalenzrelationen?
   - x steht zu y in Relation, falls x und y die gleiche Sprache sprechen.
   - x steht zu y in Relation, falls x älter oder genauso alt wie y ist.
   - x steht zu y in Relation, falls x und y sich gegenseitig kennen.

Hüllen

Sei M eine Menge und $R \subseteq M \times M$ eine Relation.

Wir suchen nun nach der kleinsten Anzahl von geordneten Paaren aus $M \times M$, die wir zu R hinzufügen müssen, damit die so erweiterte Relation – Hülle genannt – bestimmte Eigenschaften besitzt.

1. Die **transitive Hülle** von R ist die Relation $<R>_t \subseteq M \times M$ definiert durch:

$$(x , y) \in <R>_t \Leftrightarrow (x , y) \in R \vee \exists\, n \in \mathbb{N} :$$

$$\exists\, t_1, t_2, \ldots, t_n : (x , t_1), (t_1 , t_2), \ldots, (t_{n-1} , t_n), (t_n , y) \in <R>_t$$

2. Die **symmetrische Hülle** von R ist die Relation $<R>_s \subseteq M \times M$ definiert durch:

$$(x , y) \in <R>_s \Leftrightarrow ((x , y) \in R \vee (y , x) \in R)$$

$$<R>_s = R \cup R^{-1}$$

Hüllen

3. Die **reflexiv-transitive Hülle** von R ist die Relation $<R>_{rt} \subseteq M \times M$ definiert durch:

$$(x , y) \in <R>_{rt} \Leftrightarrow ((x , y) \in <R>_{t} \vee x = y)$$

4. Die **reflexiv-symmetrisch-transitive Hülle** von R ist die Relation $<R>_{rst} \subseteq M \times M$ definiert durch:

$$<R>_{rst} = <<R>_{s} >_{rt}$$

$<R>_{rst}$ ist die „kleinste" Erweiterung von R zu einer Äquivalenzrelation.

Funktionen

- Eine **Funktion** f ist eine binäre Relation $f \subseteq A \times B$, die linkstotal und rechtseindeutig ist: Zu jedem $a \in A$ gibt es genau ein $b \in B$ mit $(a, b) \in f$.

- Bei Funktionen schreibt man $f : A \rightarrow B$ anstatt $f \subseteq A \times B$ und $f(a) = b$ anstatt $(a, b) \in f$.

- Terminologie

  1. A heisst der **Definitionsbereich** von f.

  2. B heisst der **Wertebereich** von f.

  3. Die Menge $f(A) = \{ f(a) \mid a \in A \}$ heisst das **Bild** von f.

- Eigenschaften von Funktionen

  1. Eine Funktion ist **surjektiv**, wenn sie rechtstotal ist.

  2. Eine Funktion ist **injektiv**, wenn sie linkseindeutig ist.

  3. Eine Funktionen ist **bijektiv**, wenn sie surjektiv und injektiv ist.

- Sind $f : A \rightarrow B$ und $g : B \rightarrow C$ Funktionen, so bezeichnet $g \circ f : A \rightarrow C$ die **Komposition** von f und g, die durch $(g \circ f)(a) = g(f(a))$ definiert ist.

Spezielle Funktionen

- Identität

  *Die Funktion $id_A : A \to A$, die durch $id_A(a) = a$ definiert ist, heisst die **Identität**.*

- Konstante Funktion

  *Eine Funktion $c : A \to B$, die für alle Werte des Arguments denselben Wert hat, heisst **konstant**.*

- Umkehrfunktion

  *Eine Funktion $g : B \to A$ heisst eine **Umkehrfunktion** einer Funktion $f : A \to B$, wenn*

  $$g \circ f : A \to A \text{ gleich } id_A \text{ ist, und}$$

  $$f \circ g : B \to B \text{ gleich } id_B \text{ ist.}$$

  Eine Funktion hat genau dann eine Umkehrfunktion, wenn sie bijektiv ist. Diese Umkehrfunktion ist eindeutig.

- Charakteristische Funktion
  Gegen sei eine Menge A und ein Element $a \in A$. Die Funktion

  $$\chi_a : A \to \{0,1\}$$

  *ist definiert als $\chi_a(a) = 1$ und $\chi_a(b) = 0$ für $b \neq a$ und heisst die **charakterische Funktion** von a..*

Funktionenräume

Ein Funktionenraum ist eine Menge von Funktionen.

Der Funktionenraum A^B ist definiert als

$$A^B = \{f \mid f : B \to A\}.$$

Er beinhaltet alle Funktionen, die die Menge B auf die Menge A abbilden.

Wie viele Elemente hat A^B ?

Funktionen mit mehreren Variablen

Eine Funktion kann von mehreren Variablen abhängen, und der Wertebereich kann mehrdimensional sein. Formal:

$$f\colon A_1 \times \ldots \times A_n \to B_1 \times \ldots \times B_m \ .$$

Man schreibt dann für die Funktionswerte

$$f(a_1 , \ldots , a_n) = (b_1 , \ldots , b_m)$$

$$= (f_1 (a_1 , \ldots , a_n) , \ldots , f_m (a_1 , \ldots , a_n)) \quad .$$

Die Funktionen $f_1 ,\ldots, f_m$ heissen **Koordinatenfunktionen**.

Beispiele:

- Additionsfunktion: $\oplus\colon \mathbb{Z} \times \mathbb{Z} \to \mathbb{Z}$ mit $\oplus(a,b)= a + b$.
- Multiplikationsfunktion: $\odot\colon \mathbb{Z} \times \mathbb{Z} \to \mathbb{Z}$ mit $\odot(a,b)= a \bullet b$.
- „Spiralfunktion“:
  $sp\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R} \times \mathbb{R} \times \mathbb{R}$ mit $sp(t)=(\sin(t) , \cos(t) , t)$.

Kardinalität von Mengen

- Anzahl von Elementen (informell)

  Sei A eine Menge mit endlich vielen Elementen. Die Anzahl |A| nennt man die Mächtigkeit oder Kardinalität der Menge.

- Zwei endliche Mengen haben dieselbe Kardinalität, wenn die Anzahl Elemente in beiden Mengen gleich ist. Nimmt man je ein Element aus beiden Mengen heraus, bleiben am Ende zwei leere Mengen.

- Cantor hat diese Idee für unendliche Mengen weiterentwickelt: Zwei unendliche Mengen haben dieselbe Kardinalität, wenn sich die Elemente beider Mengen paaren lassen:

$$\begin{array}{cccccccccccc} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 & 9 & 10 & \\ \updownarrow & \updownarrow & \updownarrow & \updownarrow & \updownarrow & \updownarrow & \updownarrow & \updownarrow & \updownarrow & \updownarrow & \cdots \\ 2 & 4 & 6 & 8 & 10 & 12 & 14 & 16 & 18 & 20 & \end{array}$$

Kardinalität von Mengen (2)

- Formaler:

  $|X| = |Y| \Leftrightarrow$ *es gibt eine Bijektion zwischen X und Y*

  $|X| \leq |Y| \Leftrightarrow$ *es gibt eine injektive Funktion von X nach Y*

- Die Relation ~ definiert durch

  $X \sim Y \Leftrightarrow$ *es gibt eine Bijektion zwischen X und Y*

  ist eine Äquivalenzrelation.

- Wir definieren nun $|X|$ als die Äquivalenzklasse $(X)_\sim$

- Die Kardinalität von □ ist $\aleph_0$ (Aleph null). $\aleph_0$ ist die kleinste unendliche Kardinalzahl. Mengen mit der Kardinalzahl $\aleph_0$ werden **abzählbar unendlich** genannt.

- Eine weitere Kardinalzahl ist **c.** Dies ist die Kardinalität von $\mathcal{P}$(□) und $\mathbb{R}$. Mengen mit der Kardinalzahl **c** werden **überabzählbar** genannt.

- Cantors Diagonalisierungsargument beweist $\mathbf{c} <> \aleph_0$.

Cantors Diagonalisierungsargument für $|\mathcal{P}(□)| > |□|$

Beweis durch Widerspruch.

Wir nehmen an, dass $|\mathcal{P}(□)| \leq |□|$. D.h., man kann jeder Teilmenge von □ eine Zahl aus □ so zuordnen, dass jede Zahl aus □ höchstens einmal benutzt wird.

Uns interessieren die Paare, bei denen die Teilmenge von □ die Zahl aus □ nicht enthält, mit der sie gepaart wird. Beim Paar (1, {2}) z.B. enthält die Teilmenge die Zahl nicht, jedoch beim Paar (2, {2, 3}) enthält sie sie.

Wir definieren eine Teilmenge $M \subseteq □$ so, dass M die Zahlen enthält, die entweder **nicht gepaart sind** oder mit einer Teilmenge von □ gepaart sind, die **die Zahl nicht enthalten**. M ist eine Teilmenge von □. Also muss es ein Paar (z, M) geben. Ist z ein Element von M?

Ja: Dann ist z gepaart mit einer Menge, die z enthält. Das ist ein Widerspruch zur Definition von M.

Nein: Dann ist z gepaart mit einer Menge aus $|\mathcal{P}(□)|$ (nämlich M), die z nicht enthält. Nach der Definition von M muss z dann aber ein Element von M sein. Widerspruch.

Also muss $|\mathcal{P}(□)| > |□|$ gelten.

Russelsches Paradox in der naiven Mengenlehre

- Axiom der Komprehension: Für jede Eigenschaft können wir eine Menge bilden, die genau die Elemente enthält, die diese Eigenschaft haben.

- Der Begriff der Eigenschaft muss eingeschränkt werden, sonst entsteht ein Widerspruch.

- Beispiel: Man definiere M als die Mengen aller Mengen, die sich selbst nicht enthalten:

$$M = \{ X \mid X \notin X \}$$

Frage: Enthält M sich selber?

Ja. *Wenn M sich selbst enthält, dann darf M sich selbst nicht enthalten*

Nein. *Wenn M sich selbst nicht enthält, dann muss M sich selbst enthalten*

Wir wissen aber aus der Logik, dass aus einem Widerspruch alles abgeleitet werden kann.

Rechnen mit Kardinalitäten

Für endliche Mengen gilt:

- $| A \cup B | = | A | + | B | - | A \cap B |$
- $| A \cup B \cup C | = | A | + | B | + | C |$
  $- | A \cap B | - | A \cap C | - | B \cap C | + | A \cap B \cap C |$
- $| A - B | = | A | - | B |$, falls $B \subseteq A$
- $| A \times B | = | A | \bullet | B |$

Für abzählbar unendliche Mengen gilt:

- $\aleph_0 + \aleph_0 = \aleph_0$
- $\aleph_0 \bullet \aleph_0 = \aleph_0$
- Was ist mit $\aleph_0 - \aleph_0$?