Induktion

- Strukturelle Induktion (structural i., mathematical i.) ist eine wichtige Beweismethode für Aussagen über rekursiv definierte Objekte.

  In der Informatik wird strukturelle Induktion benutzt, um Eigenschaften von Schleifen und rekursiv definierten Algorithmen nachzuweisen.

- Strukturelle Induktion ist ein Deduktionsverfahren, d.h. sie zeigt, dass bewiesene Aussagen notwendigerweise gelten und liefert keine neue Information.

- Strukturelle Induktion sollte nicht mit der Form von Induktion verwechselt werden, in der man aus Beobachtungen allgemeine Regeln als neue Information ableitet.

  Beispiel: man stellt fest, dass für eine endliche Menge von Werten X_i immer $p(X_i)$ und $q(X_i)$ gilt, und stellt dann die Regel $\forall X\ (p(X) \rightarrow q(X))$ auf

  Regel ist neue Information

  Regel ist eine widerlegbare Hypothese: ein Gegenbeispiel, d.h. ein X, für das zwar p(X) gilt, aber nicht q(X), widerlegt die Hypothese

Vollständige Induktion

- Vollständige Induktion liefert Beweise von Aussagen über natürliche Zahlen.

- Induktionsprinzip

  Sei A: $N_0 \rightarrow \{W, F\}$ eine Eigenschaft natürlicher Zahlen, für die die beiden folgenden Aussagen gelten

  Induktionsverankerung: A(0) gilt

  Induktionsschritt: falls die Induktionsannahme A(n) für eine beliebige natürliche Zahl n gilt, dann gilt auch die Induktionsbehauptung A(n+1)

  dann gilt A(n) für alle natürlichen Zahlen $n \in N_0$.

- Beispiel

  $A(n)$: $0 + 1 + 2 + \ldots + n = n\,(n+1)/2$

  Induktionsverankerung:

  A(0): $0 = 0\,(0 + 1)/2$

  Induktionsannahme: Behauptung sei richtig für n

  Induktionsschritt: $A(n) \rightarrow A(n+1)$

  $0 + 1 + 2 + \ldots + n + (n+1) = n\,(n + 1)\ /\ 2 + (n+1)$

  $= (n + 1)\,(n/2 + 1) = (n + 1)\,(n + 2)/2$

  Also gilt A(n) für alle natürlichen Zahlen $n \in N_0$.

Vollständige Induktion

- Grundlage der vollständigen Induktion ist Peanos 5. Axiom für die natürlichen Zahlen

  Sei $T \subseteq N_0$ eine Teilmenge der natürlichen Zahlen mit $0 \in T$ und $\forall\, n\ (n \in T \rightarrow s(n) \in T)$. Dann gilt $T = N_0$.

- Verallgemeinerungen

  Anker kann auch eine andere natürliche Zahl n_A sein; $A(n)$ gilt dann für alle $n \geq n_A$

  Schritt kann auch grösser als 1 sein, dann gilt $A(n)$ für die entsprechende Teilmenge der natürlichen Zahlen

Strukturelle Induktion

- Induktion über natürliche Zahlen ist ein Spezialfall der strukturellen Induktion:

  Sei M eine Menge und $<_M$ eine Ordnungsrelation auf M, sodass es keine beliebig absteigende Folge $m_0 >_M m_1 >_M m_2 >_M \ldots$ von Elementen von M gibt.

  Dann heisst $<_M$ eine wohlbegründete Ordnung (well-founded order) auf M.

  Sei A: M $\rightarrow$ {W, F} eine Eigenschaft der Elemente der Menge M. Dann gilt das Induktionsprinzip:

  $\forall m \in M(\forall k \in M(k <_M m \rightarrow A(k)) \rightarrow A(m))$

  $\rightarrow$

  $\forall m \in M(A(m))$

- Für $M=N_0$ und $n <_M n+1$ erhalten wir die vollständige Induktion

  $\forall m \in N_0(\forall k \in N_0(k <_M m \rightarrow A(k)) \rightarrow A(m))$

  $\rightarrow$

  $\forall m \in N_0(A(m))$

- Weitere Beispiele wohlgeordneter Ordnungen, für die wir strukturelle Induktion verwenden können:

  Bäume $\quad <_M$ ist die Teilbaumrelation

  Listen $\quad <_M$ ist die Präfixrelation

Alternative Definition der strukturellen Induktion

- Menge M heisst induktiv definiert, wenn

  M konstante Elemente enthält

  und

  $m_1, \ldots, m_k$ Elemente von M sind und für Funktionen $f/k: M^k \to M$ gilt, dass $f(m_1, \ldots, m_k)$ Element von M ist

  und

  M keine weiteren Elemente enthält.

- Strukturelle Induktion

  Sei $A: M \to \{W, F\}$ eine Eigenschaft der Elemente einer induktiv definierten Menge M, für die die beiden folgenden Aussagen gelten

  Induktionsverankerung: A gilt für alle Konstanten von M

  Induktionsschritt: haben die Elemente $m_1, \ldots, m_k$ die Eigenschaft A, dann hat auch $f(m_1, \ldots, m_k)$ die Eigenschaft A

  dann gilt A für alle Elemente von M.

Beispiel induktiv definierte Menge

- Menge S von Strings über einem Alphabet A ist induktiv definiert

  S enthält den leeren String ε

  wenn $s \in S$ und $a \in A$, dann ist ihre Konkatenation $s \bullet a$ in S

  S enthält keine weiteren Elemente

- für die Funktion Konkatenation $\bullet/2$ gilt

  $s \bullet \varepsilon = \varepsilon \bullet s = s$

  $(s_1 \bullet s_2) \bullet s_3 = s_1 \bullet (s_2 \bullet s_3) = s_1 \bullet s_2 \bullet s_3$

Beispiel struktureller Induktion

- Gegeben sei Menge S von Strings über einem Alphabet A. Umkehrung rev(s) eines Strings s ist s rückwärts geschrieben mit

  $\mathrm{rev}(\varepsilon) = \varepsilon$ und $\mathrm{rev}(s \bullet a) = a \bullet \mathrm{rev}(s)$ mit $s \in S$ und $a \in A$

- Induktionsbeweis von

  $\mathrm{rev}(s_1 \bullet s_2) = \mathrm{rev}(s_2) \bullet \mathrm{rev}(s_1)$ mit $s_1, s_2 \in S$

  als Induktion über die Struktur von s_2

  Induktionsverankerung:

  $s_2 = \varepsilon$

  $\mathrm{rev}(s_1 \bullet \varepsilon) = \mathrm{rev}(s_1) = \varepsilon \bullet \mathrm{rev}(s_1) = \mathrm{rev}(\varepsilon) \bullet \mathrm{rev}(s_1)$

  Induktionsschritt:

  $s_2 = s_3 \bullet a$ mit $s_3 \in S$ und $a \in A$

  $\mathrm{rev}(s_1 \bullet (s_3 \bullet a)) =$

  $\mathrm{rev}((s_1 \bullet s_3) \bullet a) =$ (Definition von $\bullet/2$)

  $a \bullet \mathrm{rev}(s_1 \bullet s_3) =$ (Definition von rev/1)

  $a \bullet \mathrm{rev}(s_3) \bullet \mathrm{rev}(s_1) =$ (Induktionsannahme)

  $(a \bullet \mathrm{rev}(s_3)) \bullet \mathrm{rev}(s_1) =$ (Definition von $\bullet/2$)

  $\mathrm{rev}(s_3 \bullet a) \bullet \mathrm{rev}(s_1)$ (Definition von rev/1)

  QED