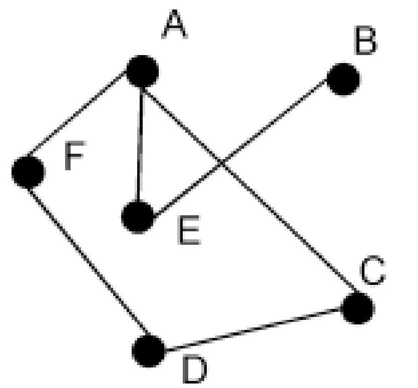
Anwendungen von Graphen

- Strassen- und Verkehrsnetze
- Computernetzwerke
- elektrische Schaltpläne
- Entity-Relationship Diagramme
- Beweisbäume
- endliche Automaten
- Syntaxbäume für Programmiersprachen
- Entscheidungsbäume
- Petri-Netze

Elementare Definitionen

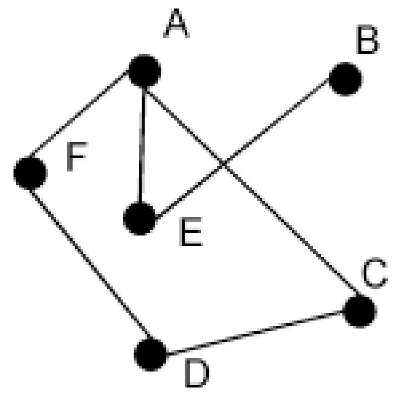
- Ein Graph besteht aus **Knoten** und **Kanten**, die die Knoten verbinden.



- Kanten können
  - **gerichtet** oder **ungerichtet** sein
  - **mehrfach** oder **einfach** sein
  - einen Knoten mit sich selbst verbinden (**Schlaufen**)
- Arten von Graphen (jeweils mit oder ohne Schlaufen)
  - **einfache Graphen** (ungerichtete Einfachkanten)
  - **Digraphen** (gerichtete Einfachkanten)
  - **Multigraphen** (ungerichtete Mehrfachkanten)
  - **Dimultigraphen** (gerichtete Mehrfachkanten)

Formalisierung von Graphen

Ein **einfacher Graph** G = (V, E) ohne Schlaufen kann formalisiert werden als ein Paar aus einer endlichen Menge V (vertex, Knoten) und einer Menge E (edge, Kante) von Mengen von zwei Elementen aus V.



G = ({A, B, C, D, E, F},
{{A, E}, {B, E}, {A, C}, {A, F}, {F, D}, {D, C}})

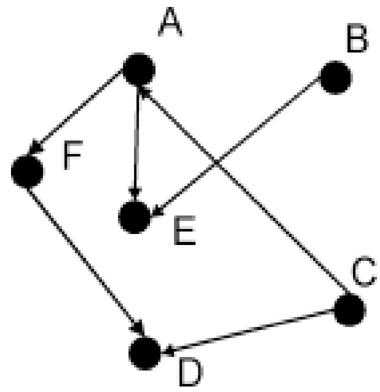
Alternative Formalisierung:

Ein einfacher Graph (ohne Schlaufen) ist ein Paar G = (V, Γ) aus einer endlichen Menge V und einer symmetrischen (und irreflexiven) Relation $\Gamma \subseteq V \times V$.

G = ({A, B, C, D, E, F},
{(A, E), (B, E), (A, C), (A, F), (F, D), (D, C),
(E, A), (E, B), (C, A), (F, A), (D, F), (C, D)})

Formalisierung von Digraphen

Ein **Digraph** G = (V, Γ) (ohne Schlaufen) ist ein Paar aus einer endlichen Menge V und einer (irreflexiven) Relation $\Gamma \subseteq V \times V$.



G = ({A, B, C, D, E, F},
{(A, E), (B, E), (C, A), (A, F), (F, D), (C, D)})

Formalisierung von Multigraphen

- Ein **ungerichteter Multigraph ohne Schlaufen** $G = (V, E, \alpha)$ ist ein Tupel aus den endlichen Mengen V (Knoten) und E (Kanten) mit $V \cap E = \emptyset$ und einer Funktion $\alpha : E \rightarrow \{ P \subseteq V \mid |P| = 2 \}$, die für jede Kante *e* die Endpunkte $\alpha(e)$ angibt.

G = ({A, B, C, D, E, F},
{a, b, c, d, e, f, g, h, i},
{(a, {F, A}), (b, {F, A}), (c, {F, A}),
(d, {A, B}), (e, {E, B}), (f, {E, D}),
(g, {E, D}), (h, {D, C}), (i, {D, C})})

- Ein **gerichteter Multigraph mit Schlaufen** $G = (V, E, i, f)$ ist ein Tupel aus den endlichen Mengen E und V mit $E \cap V = \emptyset$ und den Funktionen $i, f : E \rightarrow V$. Für eine Kante e gibt i(e) den Anfangs- und f(e) den Endpunkt an.

G = ({A, B, C, D, E, F},
{a, b, c, d, e, f, g, h, i},
{(a, A), (b, F), (c, F), (d, B), (e, B),
(f, D), (g, D), (h, C), (i, C)},
{(a, F), (b, A), (c, A), (d, A), (e, E),
(f, E), (g, E), (h, D), (i, C)})

Verbindungen in (Di-) Graphen

- In einem (Di-) Graph sei e eine Kante von x nach y. Dann sind x und y **inzident** zu e, e ist **inzident** zu x und y, und x und y sind **adjazent**.

- Ein **Weg in einem (Di-) Graph** ist ein n-Tupel $(x_1, x_2, \ldots, x_n) \in V^n$ mit $n > 1$ von Knoten $x_i \in V$, bei dem alle (x_i, x_{i+1}) Kanten sind. Die Länge des Wegs ist n-1, der Anfangspunkt ist x_1 und der Endpunkt ist x_n.

- Ein **Zyklus** ist ein Weg, dessen Anfangs- und Endpunkt gleich sind, der mindestens die Länge drei hat, und in dem eine Kante höchstens einmal vorkommt.

- Ein Knoten y ist in einem (Di-) Graph von einem Knoten x **erreichbar,** wenn es einen Weg mit Anfangspunkt x und Endpunkt y gibt. Ein Punkt ist immer von sich selbst aus erreichbar.

- Zwei Knoten x und y in einem (Di-) Graph sind **zusammenhängend,** wenn x von y und y von x erreichbar sind.

- Ein **(Di-) Graph** heisst **zusammenhängend**, wenn je zwei seiner Knoten zusammenhängend sind.

Zusammenhang in (Di-) Graphen

- Die Relation $\leftrightarrow \subseteq V \times V$, für die $x \leftrightarrow y$ genau dann gilt, wenn x und y zusammenhängend sind, heisst die **Zusammenhangsrelation** eines (Di-) Graphs.
- Die **Zusammenhangsrelation** ist eine Äquivalenzrelation.
- Eine **Zusammenhangskomponente** eines (Di-) Graphs ist eine Äquivalenzklasse der Zusammenhangsrelation auf dem (Di-) Graph.

Grad und Planarität

- Der **Grad** eines Knotens in einem (Di-) Graph ist die Anzahl der Kanten, die inzident zu diesem Knoten sind.
- Ein (Di-) Graph heisst **planar**, wenn er so in der Ebene gezeichnet werden kann, dass die Schnittpunkte der Kanten genau die Knoten des (Di-) Graphs sind.

Teilgraphen

- Ein (Di-) Graph (F, Δ) heisst genau dann ein **Teilgraph** eines (Di-) Graphs (E, Γ), wenn F $\subseteq$ E und $\Delta \subseteq \Gamma$.

- Ein (Di-) Graph (F, Δ) heisst genau dann ein **induzierter Teilgraph** eines (Di-) Graphs (E, Γ), wenn (F, Δ) ein Teilgraph von E ist und wenn es zwischen jedem Paar von Punkten aus F genau dann eine Kante gibt, wenn es auch in (E, Γ) eine Kante gibt.

Bäume als Graphen

- Ein **Baum** ist ein zusammenhängender einfacher Graph ohne Zyklen.

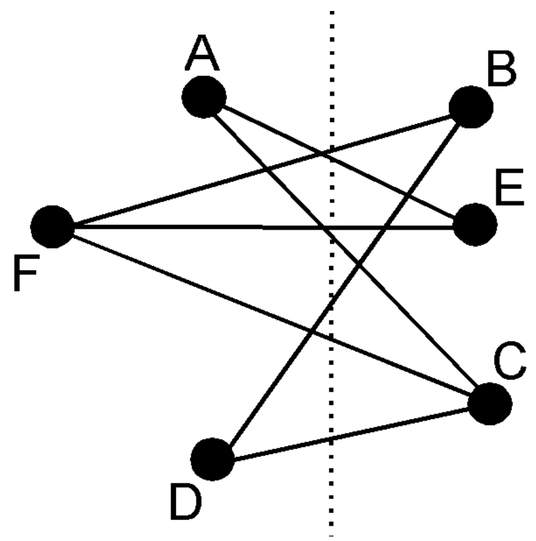
- Sei (P, Γ) ein zusammenhängender Graph. Ein **spannender Baum** ist ein Teilgraph von (P, Γ), der ein Baum ist und alle Knoten des Graphs enthält, also ein Baum der Form (P, Δ) mit $\Delta \subseteq \Gamma$.

Eigenschaften von Bäumen

- Ein Graph ist genau dann ein Baum, wenn
  - er zusammenhängend ist.
  - er unzusammenhängend wird, sobald eine Kante entfernt wird, d.h. jede Kante eines Baumes ist eine so genannte kritische Kante.
- Sei T ein endlicher Baum mit mindestens einem Knoten. Dann gilt:
  - T hat einen Knoten mehr als Kanten.
  - T hat mindestens einen Knoten mit Grad < 2.
  - T ist planar.

Bipartite Graphen

Ein **bipartiter Graph** ($A \cup B$, E) ist ein Graph, bei dem die Menge der Knoten so in zwei nicht leere, disjunkte Mengen A und B zerlegt werden kann, dass jede Kante einen Knoten in A mit einem Knoten in B verbindet, d.h., kein Paar von Knoten aus A und kein Paar von Knoten aus B ist adjazent.

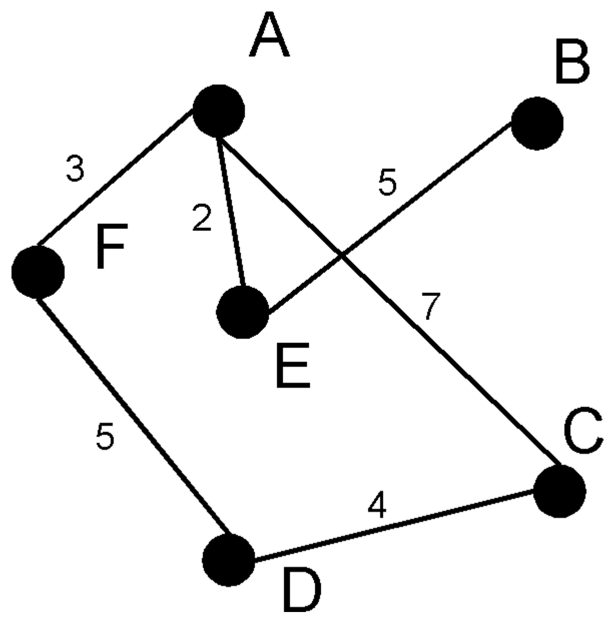


Matching

- Ein M**atching** in einem bipartiten Graph ist eine Menge von Kanten, die keine gemeinsamen Knoten haben.
- Ein Matching ist **vollständig**, wenn alle Knoten aus A in einer Kante vorkommen.
- Ein Matching ist **perfekt**, wenn alle Knoten in einer Kante vorkommen.
- In einem bipartiten Graph $(A \cup B, E)$ gibt es genau dann ein vollständiges Matching, wenn es für jede Menge $C \subseteq A$ mindestens $|C|$ Knoten in B gibt, die adjazent zu Knoten in C sind.
- In einem bipartiten Graph $(A \cup B, E)$ gibt es genau dann ein perfektes Matching, wenn es ein vollständiges Matching gibt, und wenn $|A| = |B|$.

Attributierte Graphen

- Graph mit attributierten Kanten: Jeder Kante wird ein Attribut zugeordnet
- Graph mit attributierten Knoten: Jedem Knoten wird ein Attribut zugeordnet
- Anwendungen attributierter Graphen: Graphen mit Kosten (Wegoptimierung, z.B. traveling salesman), Färbung, Petri Netze, neuronale Netze

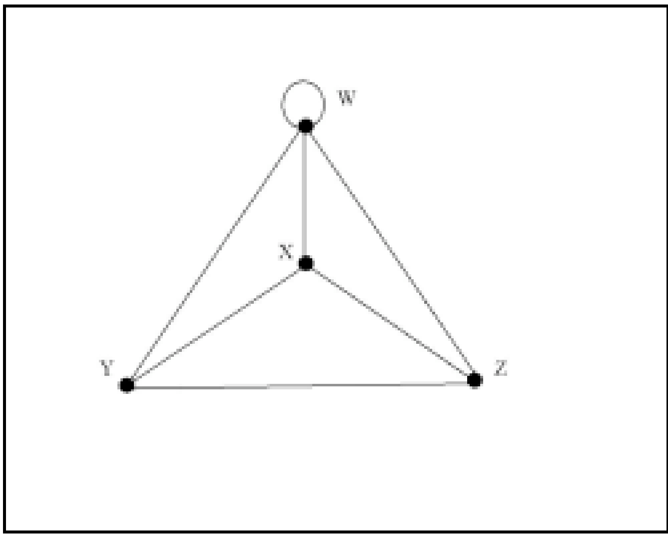


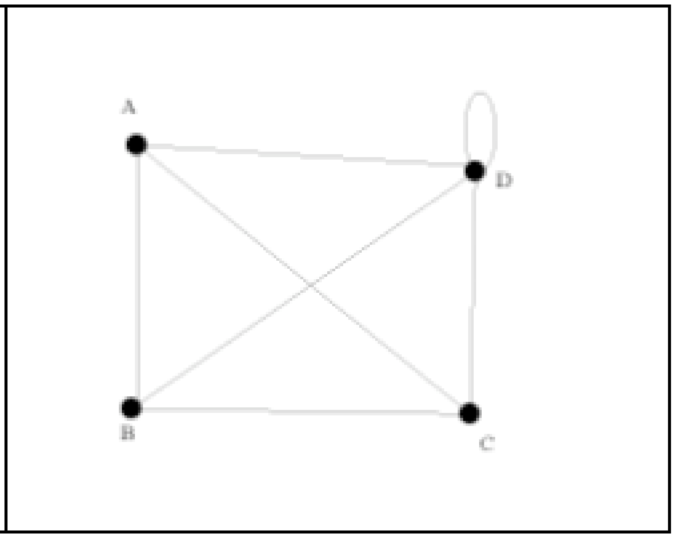
Isomorphie

- Strukturelle Unterschiede zwischen Graphen, nicht Unterschiede in der Benennung interessieren uns. Graphen, die sich nur in der Benennung unterscheiden, nennt man **isomorph**.

- Zwei (Di-) Graphen $G = (E, \Gamma)$ und $H = (F, \Delta)$ sind isomorph, wenn es eine bijektive Funktion $f : E \rightarrow F$ gibt mit

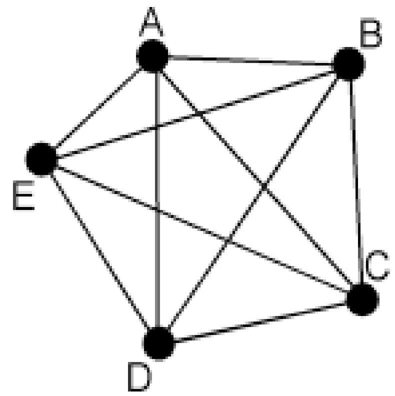
$$\forall\ u, v \in E : (u, v) \in \Gamma \Leftrightarrow (f(u), f(v)) \in \Delta$$





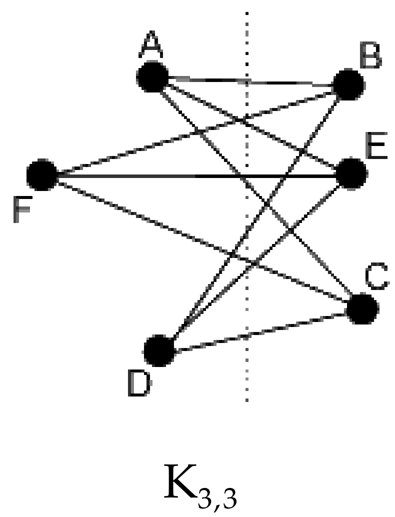
Spezielle Graphen

- K_n ist der vollständige Graph ohne Schlaufen mit n Knoten, d.h., mit Kanten zwischen allen Knoten



K_5

- $K_{m,n}$ ist der vollständige bipartite Graph mit einer Partition der Menge der Knoten in eine Menge M mit m und eine Menge N mit n Knoten. Jeder Knoten aus M ist zu allen Knoten aus N adjazent.

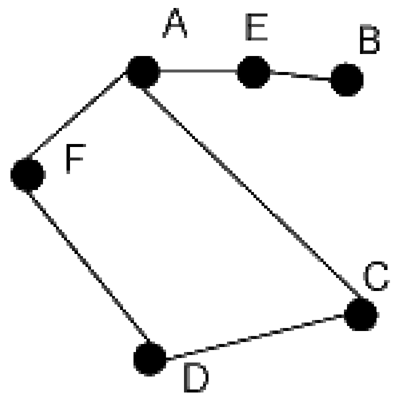


$K_{3,3}$

Theorem von Euler

- Eine Fläche eines Graphs ist eine endlich grosse, durch den Graph abgegrenzte Region der Zeichenebene.
- Sei G ein endlicher, planarer, zusammenhängender Graph mit einer Menge V von Knoten, einer Menge E von Kanten und einer Menge F von Flächen. Sei $|V| > 0$. Dann gilt

$$|V| + |F| = |E| + 1$$



Tests auf Planarität

- Planare Zeichnung
- **Eulersche Kriterien**

  Ein Graph ist nicht planar, wenn die dreifache Knotenzahl kleiner ist als die Kantenzahl plus 6.

  Ein Graph ist nicht planar, wenn die doppelte Knotenzahl kleiner ist als die Kantenzahl plus 4 und der Graph keine Dreiecke enthält.

  Ein Graph ist nicht planar, wenn der Graph nur Knoten vom Grad ≥ 6 enthält.

- **Kuratowski Kriterium**

  Ein Graph ist genau dann planar, wenn er weder $K_{3,3}$ noch K_5 noch einen Unterteilungsgraphen dieser zwei Graphen als Teilgraph enthält.

  Unterteilungsgraph: Seien F und G zwei Graphen. F heisst ein Unterteilungsgraph von G, wenn F aus G ausschliesslich durch Hinzufügen von Knoten vom Grad 2 entsteht, die eine bereits bestehende Kanten zweiteilen.

Färbung von Graphen

- Sei C eine Menge (von Farben). Eine **Färbung** eines Graphs G = (V, E) ist eine Zuweisung von Elementen aus V zu den Elementen von C so, dass adjazenten Knoten unterschiedliche Elemente von C zugewiesen werden.
- Die **chromatische Zahl** eines Graphs G = (V, E) ist die kleinste Zahl von Farben, mit der er gefärbt werden kann.
- Die **Färbung von Karten** ist äquivalent zur Färbung von Graphen.
- **Scheduling** kann ebenfalls als Färbungsproblem formuliert werden.

Färbung von planaren Graphen

- Es ist relativ einfach zu zeigen, dass 5 Farben genügen, um einen planaren Graph zu färben.
- Es gelang nicht, einen planaren Graph zu finden, der fünf Farben brauchte.
- 1976 bewiesen Appel und Haken mit Computerunterstützung, dass vier Farben genügen.

Charakteristische Funktion einer Relation

- Die charakteristische Funktion einer Relation R auf einer Menge X ist eine Funktion von $X \times X$ auf $\{ 0, 1 \}$, mit dem Wert 1, wenn das entsprechende Paar in der Relation ist, 0, wenn nicht.

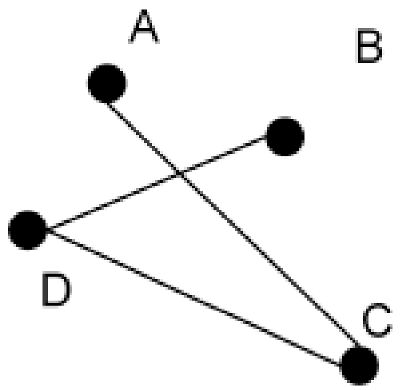
- Wenn n Elemente in der Menge X enthalten sind, entspricht dies einer $n \times n$ Matrix A, deren (r, s)-tes Element 1 oder 0 ist, je nach dem, ob das Paar (x_r, x_s) in R enthalten ist oder nicht.

- Beispiel: $X = \{ a, b, c \}$, $R = \{ (a, a), (b, a), (c, b) \}$

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

Repräsentation von einfachen Graphen als Adjazenzmatrix

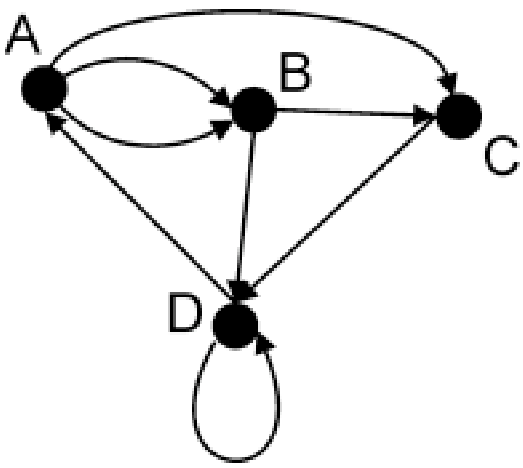
Die Adjazenzmatrix eines (Di-) Graphs ist die charakteristische Funktion der Kantenrelation.



$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

Repräsentation von Multigraphen als Adjazenzmatrix

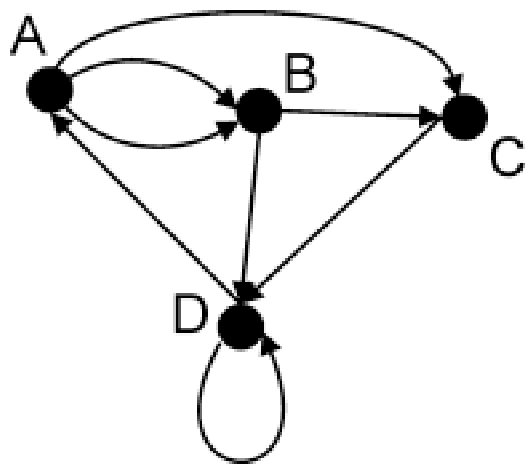
Der Eintrag in die Adjazenzmatrix ist die Anzahl Kanten zwischen den Knoten.



$$\begin{pmatrix} 0 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Matrix mit Wegen der Länge n

- Sei G ein Graph und $n \in \mathbb{N}$. Der Graph G_n enthält eine Kante von x nach y genau dann, wenn es einen Weg der Länge n von x nach y gibt.
- Für n = 2 und G =



lautet die Adjazenzmatrix A^n von G_n

$$\begin{pmatrix} 0 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 0 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 2 & 3 \\ 1 & 0 & 0 & 2 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 2 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

Konsolidierung der Kanten

Wenn uns nur interessiert, ob ein Weg existiert, und nicht wie viele, lautet die Adjazenzmatrix A^n von G_n

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

Transitive und reflexiv transitive Hülle eines Graphs

- Sei A die Adjazenzmatrix einer binären Relation R auf einer Menge X mit n Elementen.
- Wir definieren + auf der Menge { 0, 1 } wie folgt:

$$
\begin{aligned}
0 + 0 &= 0 \\
0 + 1 &= 1 \\
1 + 0 &= 1 \\
1 + 1 &= 1
\end{aligned}
$$

- Die Adjazenzmatrix der **transitiven Hülle** von R lautet

$$A + A^2 + \ldots + A^n$$

- Die Adjazenzmatrix der **reflexiv transitiven Hülle** von R lautet

$$I + A + A^2 + \ldots + A^{n-1}$$

Minimale Distanzen in gewichteten Graphen

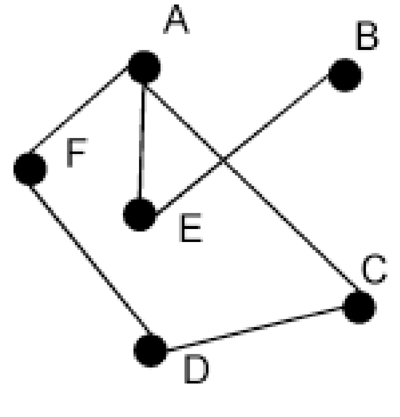
- Verallgemeinerung der Berechnung der Erreichbarkeit und des Zusammenhangs durch Attributierung der Kanten mit einer Zahl, die "Gewicht" genannt wird und z.B. die Länge der Kante angibt.
- Zur Vereinfachung geht man von vollständigen Graphen aus, wobei Kanten, die nicht zum ursprünglichen Graphen gehören, das Gewicht ∞ bekommen. Wenn Knoten durch mehr als eine Kante verbunden sind, wählt man die Kante mit dem kleinsten Gewicht aus.

$$\begin{pmatrix} \infty & 1 & 3 & 3 \\ 2 & \infty & 2 & \infty \\ 4 & \infty & \infty & 2 \\ \infty & 3 & \infty & \infty \end{pmatrix}$$

Eulersche Graphen

- Ein **Eulerscher Weg** ist ein Weg, in dem jede Verbindungskante des Graphen genau einmal auftaucht.
- Ein **Eulerscher Graph** ist ein Graph, in dem es einen geschlossenen Eulerschen Weg gibt, d.h., Anfangs- und Endpunkt sind gleich.
- Theoreme:
  1. Ein Graph ist genau dann ein Eulerscher Graph, wenn er zusammenhängend ist und jeder Knoten einen geradzahligen Grad hat.
  2. Ein Graph enthält genau dann einen offenen Eulerschen Weg, wenn er zusammenhängend ist und höchstens zwei Knoten mit ungeradzahligem Grad besitzt.

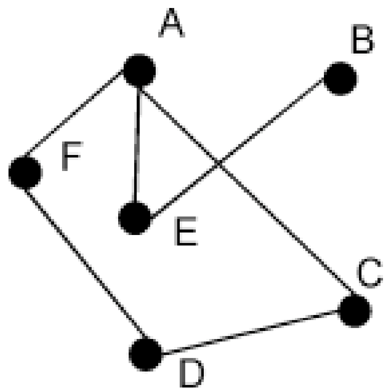
  (Zum Beweis dieser beiden Theoreme kann man folgendes Theorem verwenden: In jedem Graphen ist die Anzahl der Knoten mit ungeradzahligem Grad gerade.)



Hamiltonsche Graphen

- Ein **Hamiltonscher Weg** ist ein Weg, in dem jeder Knoten des Graphen genau einmal auftaucht.
- Ein **Hamiltonscher Graph** ist ein Graph, in dem es einen geschlossenen Hamiltonschen Weg gibt.
- Theorem:

  Ist in einem Graph mit mindestens drei Knoten der Grad jedes Knotens grösser gleich der halben Anzahl von Knoten, dann ist der Graph Hamiltonsch.



Das Traveling Salesman Problem

- Ein Handelsreisender soll von seinem Wohnort alle Städte auf einer Landkarte je einmal besuchen, und zwar so, dass die Anzahl zurückgelegter Kilometer minimal ist.
- Dies entspricht der Suche nach einem minimalen Hamiltonschen Zyklus.
- Diese Problem ist NP-vollständig, d.h., obwohl es nicht bewiesen ist, dass es nicht in polynomialer Zeit berechnet werden kann, sind alle bekannten Algorithmen von exponentieller Komplexität.
- Sogar die Suche nach irgendeinem Hamiltonschen Zyklus ist ein NP-vollständiges Problem.
- Bei beiden Problemen müssen im schlimmsten Fall alle Wege durch den Graph aufgezählt und getestet werden.

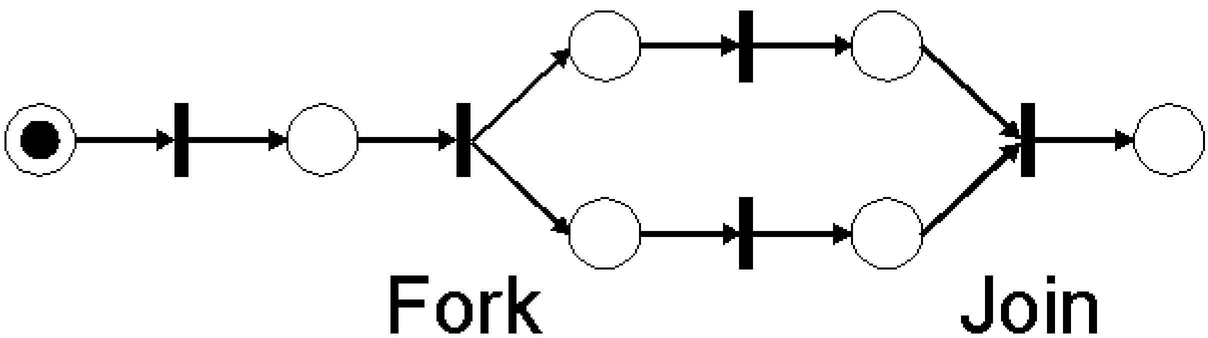
Petri Netze

- Petri Netze sind eine graphische Technik zur Darstellung paralleler und verteilter Prozesse.

- Eine **Aktion** bedeutet, dass ein System in einen neuen Zustand übergeführt wird. Eine Aktion wird durch eine **Transition** modelliert und als dicker Strich (oder Rechteck) gezeichnet.

- Aktionen können nur eintreten, wenn gewisse Bedingungen erfüllt sind. Eine Bedingung wird durch eine **Stelle** modelliert und als Kreis gezeichnet.

- Gültige Bedingungen werden durch Markierung der Stellen modelliert. Markierungen werden als **Token** (= fette Punkte) dargestellt. Stellen können mehrere Marken tragen.



Struktur der Petri Netze

Ein **Petri Netz** ist ein Tripel (S, T, Γ) bestehend aus

1. einer nichtleeren, endlichen Menge S von **Stellen** (auch Plätze genannt).
2. einer nichtleeren, endlichen Menge T von **Transitionen** mit $S \cap T = \emptyset$.
3. einer Relation $\Gamma \subseteq (S \times T) \cup (T \times S)$ von den Stellen auf die Transitionen und den Transitionen auf die Stellen.
   Γ heisst **Flussrelation.**

Ein Petri Netz ist ein bipartiter Digraph. Die beiden Mengen der Bipartition sind die Stellen und Transitionen.

Bezeichnungen in Petri Netzen

Eingangsstellen der Transition t

$\bullet t = \{ s \in S \mid (s, t) \in \Gamma \}$

Ausgangstellen der Transition t

$t\bullet = \{ s \in S \mid (t, s) \in \Gamma \}$

Eingangstransitionen der Stelle s

$\bullet s = \{ t \in T \mid (t, s) \in \Gamma \}$

Ausgangstransitionen der Stelle s

$s\bullet = \{ t \in T \mid (s, t) \in \Gamma \}$

Statik der Petri Netze

- Eine Funktion M: S $\rightarrow \mathbb{N}_0$ von den Stellen in die natürlichen Zahlen heisst eine Markierung eines Petri Netzes. M gibt zu jeder Stelle die Anzahl Marken an, die auf der Stelle liegen.
- Eine Stelle $s \in S$ heisst **markiert** unter der Markierung M, wenn s mit mindestens einer Marke belegt ist, d.h. $M(s) > 0$.
- Eine Transition $t \in T$ heisst **aktiviert** durch die Markierung M, wenn jede Eingangsstelle von t markiert ist.

Dynamik der Petri Netze

- Ein Petri Netz trage eine Markierung. Wenn es eine Transition gibt, die durch die Markierung aktiviert ist, dann kann das Petri Netz **schalten** (auch feuern genannt).
- Sind mehrere Transitionen durch eine Markierung aktiviert, gibt es zwei Möglichkeiten:
  1. Sind die Mengen der Eingangs- und Ausgangsstellen der Transitionen paarweise disjunkt, dann sind die Transitionen **unabhängig** und können alle schalten.
  2. Sonst wählt das Petri Netz nichtdeterministisch eine unabhängige Menge von Transitionen und schaltet sie.
- **Schalten**:

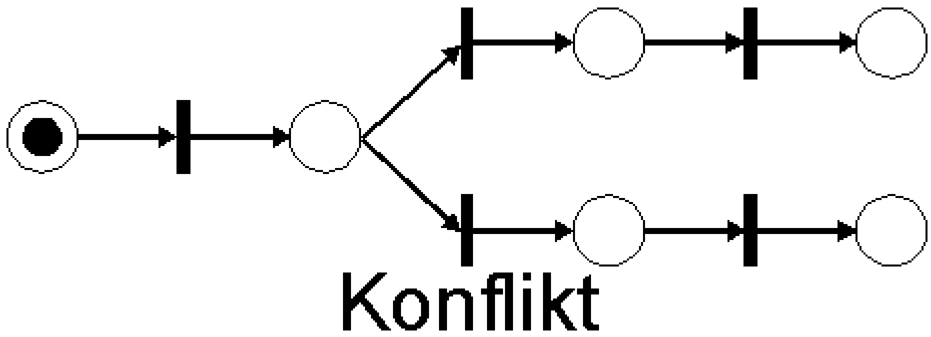
  Sei M eine Markierung und s eine aktivierte Transition. Schaltet s, ergibt sich eine neue Markierung M':

  $M'(s) = M(s) - 1 \Leftrightarrow s \in \bullet t, s \notin t\bullet$

  $M'(s) = M(s) + 1 \Leftrightarrow s \in t\bullet, s \notin \bullet t$

  $M'(s) = M(s)$ sonst.

Beispiel eines Petri Netzes



- Dieses Petri Netz beschreibt nichtdeterministisches Verhalten: Zuerst schaltet die am weitesten links stehende Transition und die zweite Stelle von links wird markiert; dann sind sowohl die obere wie die untere Transition aktiviert, von denen aber nur eine schalten kann. Eine dieser beiden Transitionen wird beliebig ausgewählt.