Inferenz, Schlussfolgerung

Kalkül: Logik + syntaktische Ableitung:

$$F, G \vdash H$$

Prämisse: Aussage, die als wahr angenommen wird.

Schluss (Konklusion): Aussage, die aus der Wahrheit der Prämisse folgt.

Gültigkeit eines Arguments:

Es gibt keine Belegung/Struktur, unter der die Prämisse wahr, aber der Schluss falsch wäre.

Syntaktisch: (Prämisse $\to$ Schluss) ist gültig.

gültige Regel z.B.: $\dfrac{A, A \to B}{B}$ (Modus Ponens)

Beispiel: $\dfrac{\text{“Wenn es regnet, gehe ich ins Kino”} \quad \text{“Es regnet”}}{\text{“Ich gehe ins Kino”}}$

ungültige Regeln z.B.:

$$\frac{A \to B, B}{A} \quad \text{und} \quad \frac{\neg A, A \to B}{\neg B}$$

Weitere Regeln

$$\frac{\neg B, A \to B}{\neg A}$$ (Modus Tollens)

Beispiel: $$\frac{\begin{array}{c}\text{“Wenn es regnet, gehe ich ins Kino”}\\ \text{“ich gehe nicht ins Kino”}\end{array}}{\text{“Es regnet nicht”}}$$

$$\frac{A \vee B, \neg B}{A}$$

Beispiel: $$\frac{\begin{array}{c}\text{“Sie trinkt Tee oder Kaffee”}\\ \text{“Sie trinkt keinen Kaffee”}\end{array}}{\text{“Sie trinkt Tee”}}$$

$$\frac{A}{A \vee B}$$

Beispiel: $$\frac{\text{“Sie trinkt Tee”}}{\begin{array}{c}\text{“Sie trinkt Tee,}\\ \text{oder draussen vor der Tür faucht}\\ \text{ein grüner Drachen”}\end{array}}$$

Arten der Inferenz

Deduktion: von Klassen auf Exemplare schliessen:

alle Menschen sind sterblich, Sokrates ist ein Mensch

Sokrates ist sterblich

unsichere Inferenzen:

Induktion: Generalisierung, Analogiebildung; von Exemplaren auf die Gesamtheit:

Sokrates ist sterblich, Sokrates ist ein Mensch

---

alle Menschen sind sterblich

Abduktion: Klassenzuordnung anhand von beobachteten Eigenschaften:

alle Menschen sind sterblich, Sokrates ist sterblich

Sokrates ist ein Mensch.

Gegenbeispiele für diese Formen der Inferenz?

Modell, Denotation

schon bekannt aus der Prädikatenlogik:

Struktur $\mathcal{A} = (U, I)$ mit U als Grundmenge, Universum, und I als Interpretation aller verwendeten (nicht-logischen) Symbole als Funktionen, Relationen oder Konstanten in U, Formeln als 0 oder 1.

Oft davon getrennt betrachtet: Belegungsfunktion h für Variablen x: $h(x) \in U$.

Die Interpretation eines logischen Ausdrucks (Term oder Formel) heisst auch *Denotat* ($\rightarrow$“denotationale Semantik”).

Schreibweise:

$[\![F]\!]^{\mathcal{A},h}$, $[\![t]\!]^{\mathcal{A},h}$

Eine Struktur $\mathcal{A}$ ist ein Modell für eine Formelmenge Σ, gdw. jedes Element F von Σ in $\mathcal{A}$ wahr ist.

Eine Formel G folgt aus einer Formelmenge Σ, gdw. G in jedem Modell von Σ wahr ist.

Theorien

Eine *Theorie* **T** ist ein Menge von Formeln, die unter Folgerung abgeschlossen ist, d.h. jede Formel, die aus einer oder mehreren der Formeln in **T** folgt, ist selbst in **T**.

Modelltheoretische Definition:

$$\mathbf{T} ::= Th(\mathcal{A}) = \{F \mid \mathcal{A} \models F\}$$

axiomatische Methode:

Menge M von Formeln vorgegeben mit:

$$\mathbf{T} ::= \textit{Cons}(M) = \{\ F \mid \text{ es gibt } F_1, ...F_n \in M, \text{ so dass } G \text{ aus } M \text{ folgt}\}$$

$$\mathbf{T} ::= \textit{Cons}(\emptyset) = \{\ F \mid F \text{ ist gültig}\}$$

Eigenschaften formaler Systeme

Konsistenz:

Es können nicht gleichzeitig eine Aussage und deren Negation abgeleitet werden.

Inkonsistente Theorien haben kein Modell!

Wenn Inkonsistenz bewiesen werden soll: Widerspruch ableiten.

Wenn Konsistenz bewiesen werden soll: Modell angeben.

Unabhängigkeit:

eine Frage der Eleganz: ist die Menge der Axiome minimal, d.h. lässt sich keines der Axiome durch andere ausdrücken?

Korrektheit:

Es können keine “unerwünschten” Aussagen abgeleitet werden.

Wenn $F_1, F_2, ...F_n \vdash F$, dann $F_1, F_2, ...F_n \models F$

Eigenschaften formaler Systeme II

Vollständigkeit:

Es werden alle “erwünschten” Aussagen abgeleitet.

Wenn $F_1, F_2, ...F_n \models F$, dann $F_1, F_2, ...F_n \vdash F$

weitere Verwendungen des Begriffs:

- formal vollständig (jede Aussage kann bewiesen oder widerlegt werden)
- semantisch vollständig in Bezug auf ein Modell (alle im Modell wahren Aussagen können abgeleitet werden)

Bedauerlicherweise sind interessante Systeme oft unvollständig:

Diagonalisierungsargument...

Axiomatisierung von Stringkonkatenation

Alphabet: Menge von Symbolen

String, Zeichenkette: Folge von Symbolen

Konkatenation: Aneinanderreihung, zweistellige Operation "," auf einer Menge A von Zeichenketten.

ϵ: Zeichenkette der Länge 0.

- Axiomatisierung ohne leeren String (Halbgruppe)

  1. Abgeschlossenheit:
     $\forall x \forall y ((x \in A \wedge y \in A) \rightarrow x, y \in A)$
  2. Assoziativität:
     $\forall x \forall y \forall z ((x, y), z = x, (y, z))$

  Beispiel für ein Modell dafür: $A = \{z \mid z$ besteht aus einer geraden Anzahl von 'a's und / oder 'b's$\}$.

- Axiomatisierung mit leerem String (Monoid)

  1. Abgeschlossenheit:
     $\forall x \forall y ((x \in A \wedge y \in A) \rightarrow x, y \in A)$
  2. Assoziativität:
     $\forall x \forall y \forall z ((x, y), z = x, (y, z))$
  3. neutrales Element:
     $\exists e \forall x (x, e = e, x = x)$

Axiomatisierung der Mengentheorie

Mehrere Möglichkeiten, hier Zermelo-Fränkel.

Vorausgesetzte Relation: “ist Element von”

1. Extensionalität:
   Wenn x und y dieselben Elemente haben, gilt $x = y$.
2. Regularität / Begründung:
   Für jede nicht leere Menge x gibt es ein $y \in x$ mit: es gibt kein z mit $z \in x$ und $z \in y$
3. Leere Menge:
   Es gibt eine Menge ohne Elemente.
4. Ungeordnetes Paar:
   Wenn x und y Mengen sind, gibt es eine Menge z so, dass für alle w gilt: $w \in z$ gdw. $w = x$ oder $w = y$, d.h. $\{x, y\}$ existiert.
5. Vereinigung:
   Für alle x gibt es ein y so, dass gilt: $z \in y$ gdw. es gibt ein $w \in x$ mit $z \in w$.
6. Teilmenge/Potenzmenge:
   Für jedes x gibt es ein y so, dass für alle z gilt: $z \in y$ gdw. $z \subseteq x$ (für alle w: $w \in z \to w \in x$).

7. Ersetzung:

Sei P eine Funktion und x eine Menge. Dann ist der Wertebereich von P beschränkt auf x eine Menge. D.h., es gibt y so, dass für alle z gilt: $z \in y$ gdw. es ein w gibt mit: $P(w) = z$

8. Unendlichkeit:

Es gibt eine Menge x so, dass es ein z gibt mit $z \in x$ und, wenn $y \in x$, dann $(y \cup \{y\}) \in x$.

9. Auswahl:

Jede Menge von nicht leeren Mengen hat eine Auswahlfunktion: eine Funktion, die aus jeder der Mengen ein Element bestimmt.

(nicht allgemein als Axiom akzeptiert, ist aber konsistent mit den übrigen und ermöglicht einfachere Beweise)

Axiomatisierung der Prädikatenlogik

Axiome:

1. $(F \to (G \to F))$
2. $((F \to (G \to H)) \to ((F \to G) \to (F \to H)))$
3. $((\neg F \to \neg G) \to (G \to F))$
4. $(\forall x F(x) \to F(a))$
   $F(x)$ eine Formel, in der x frei vorkommt

Inferenzregeln:

1. Modus Ponens :
   $$\frac{F, F \to G}{G}$$
2. $\dfrac{F \to G(a)}{F \to \forall x G(x)}$, falls a nicht in F vorkommt.

Warum Axiome <u>und</u> Regeln?

Axiome sind gültig!

Regeln ermöglichen, aus bereits erfüllten Formeln weitere herzuleiten.

formale Semantik

Natürlichsprachliche Äusserungen haben nicht prinzipiell einen Wahrheitswert.

Ob “Es schneit” wahr oder falsch ist, hängt von den Umständen ab, unter denen die Äusserung gemacht wird.

Tarski: “Schnee ist weiss” ist genau dann wahr, wenn Schnee weiss ist.

Aufgabe der formalen Semantik:

- Angaben der Bedingungen, unter denen eine natürlichsprachliche Äusserung wahr oder falsch wird.
- Feststellung der Referenzen von Ausdrücken auf Objekte der Welt
- ...

Logiken für die Semantik natürlicher Sprache

Probleme der Merkmalslogik:

Darstellung semantischen Eigenschaften ist gut möglich, geeignete Schlussverfahren (ausser Typenverträglichkeit) stehen aber nicht zur Verfügung

Probleme der Prädikatenlogik:

- Ausdrucksmächtigkeit

  z.B. Gleichheit: kann nicht von Äquivalenzklassenbildung unterschieden werden.
- Wie konstruiert man die Repräsentation?
- Kompositionalität bei Zeit und Modalität: Intension vs. Extension

Intension vs. Extension

Modalausdrücke:

“Peter ist der Bürgermeister”
“Maria will Peter heiraten”

“Maria will den Bürgermeister heiraten” ?

Temporaladverbien:

“Gestern haben wir frischen Fisch gekauft”
“Heute essen wir, was wir gestern gekauft haben”

“Heute essen wir frischen Fisch” ?

Kripke-Semantik

Mögliche-Welten-Semantik:

sei U eine Grundmenge,

P eine Folge/Menge von Weltzuständen (Informations-Zustände, zeitlich geordnet)

Denotat von	im einfachen Modell	im Kripke-Modell
Term:	Element von U	$P \to U$
Formel	Element von $\{0,1\}$	$P \to \{0,1\}$

Nebenbedingung: eine einmal wahre Formel bleibt in allen folgenden Zuständen wahr.

Kripke-Semantik, formal

Weltzustände P + zeitliche Ordnung $\leq$:
partiell geordnete Menge, *Kripke-Frame* **P** $= \langle P, \leq \rangle$

Die Interpretation einer Aussage $s \in S$ entspricht derjenigen Teilmenge von P, in der s wahr ist. Die o.a. Nebenbedingung bewirkt, dass solche Teilmengen unter $\leq$ abgeschlossen sind (*Filter* von **P**).

Eine *Kripke-Valuierung* V ist eine Abbildung von der Menge der Aussagen auf die Menge der Filter von **P**,

$$V : S \rightarrow 2^P$$

Ein *Kripke-Modell* ist ein Paar **M** = $\langle \mathbf{P}, V \rangle$.
M $\models_p s$: s ist wahr im Zustand p im Modell **M**, d.h. $p \in V(s)$

$\vee$ und $\wedge$...
M $\models_p \neg s$ gdw. für alle p' mit $p \leq p'$ nicht **M** $\models_{p'} s$
(s kann nie mehr verifiziert werden....)
M $\models_p s \rightarrow s'$ gdw. für alle p' mit $p \leq p'$ gilt:
wenn **M** $\models_{p'} s$, dann **M** $\models_{p'} s'$
(wenn s wahr ist, muss auch weiterhin s' wahr sein...)

Modal- und Temporallogik

Kripke: Mögliche-Welten-Semantik, Abbildung einer Aussage nicht auf die zwei-elementige Menge $\{0, 1\}$, sondern auf eine Folge (oder einen Baum) ihrer Elemente.

Modallogik:

Zwei neue Operatoren:

$\Box$: notwendig , $\Diamond$: möglich

intuitive Bedeutung:

$\Box A$ gilt immer in allen Welten,

$\Diamond A$ gilt wenigstens einmal in einer Welt (in allen Welten).

Temporallogiken:

Interpretation der Modaloperatoren als zeitliche (auf die Zukunft bezogene) Operatoren, der Semantik auf diskrete Zeitzustände:

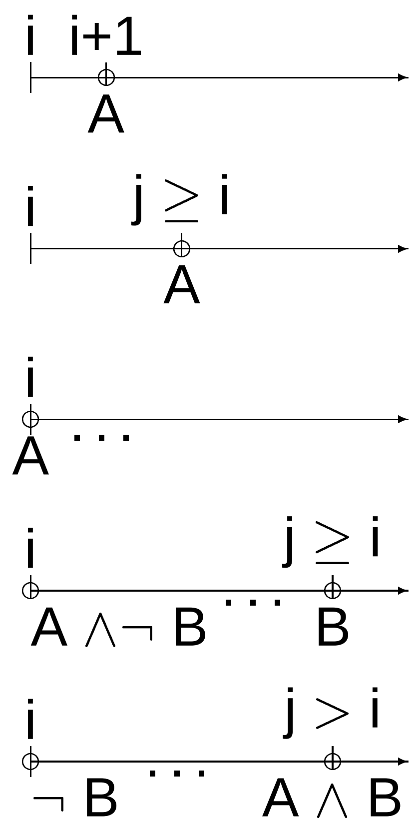
$\Box$: immer, $\Diamond$: irgendwann einmal.

Erweiterung auf Vergangenheit...

weitere Operatoren...

Temporale Operatoren und ihre Semantik

next	$\circ A$
eventually	$\Diamond A$
always	$\Box A$
until	$A \mathcal{U} B$
atnext	$A \ \mathcal{N} \ B$



Beschreibungslogiken

Aussagen über einstellige Prädikate (= Konzepte, Menge von Objekten), ind
viduelle Objekte (= Instanzen) und zweistellige Prädikate(= Rollen).

Operatoren zur Definition von Konzepten und Rollen:

Beschr.L.	**Präd.L.**	**Semantik**
C	$C(x)$	$\{d \in \mathcal{D} \mid d \in [\![C]\!]^{\mathcal{I}}\}$
$C \sqcap D$	$C(x) \wedge D(x)$	$[\![C]\!]^{\mathcal{I}} \cap [\![D]\!]^{\mathcal{I}}$
$C \sqcup D$	$C(x) \vee D(x)$	$[\![C]\!]^{\mathcal{I}} \cup [\![D]\!]^{\mathcal{I}}$
$\neg C$	$\neg C(x)$	$\mathcal{D} \setminus [\![C]\!]^{\mathcal{I}}$
$\forall R : C$	$\forall y : R(x,y) \Rightarrow C(y)$	$\{d \in \mathcal{D} \mid [\![R]\!]^{\mathcal{I}}(d) \subseteq [\![C]\!]^{\mathcal{I}}\}$
$\exists R : C$	$\exists y : R(x,y) \wedge C(y)$	$\{d \in \mathcal{D} \mid [\![R]\!]^{\mathcal{I}}(d) \cap [\![C]\!]^{\mathcal{I}} \neq \emptyset\}$
$\exists_{\geq n} R$	$\exists y_{1..n} R(x, y_{1..n})$	$\{d \in \mathcal{D} \mid \lvert [\![R]\!]^{\mathcal{I}}(d) \rvert \geq n\}$
$\exists_{\leq n} R$	$\exists i \exists y_{1..i} \forall y_{i+1} : i \leq n \wedge$ $R(x, y_{1..i}) \wedge \neg R(x, y_{1+i})$	$\{d \in \mathcal{D} \mid \lvert [\![R]\!]^{\mathcal{I}}(d) \rvert \leq n\}$
R	$R(x,y)$	$\{(d,e) \in \mathcal{D} \times \mathcal{D} \mid (d,e) \in [\![R]\!]^{\mathcal{I}}\}$
$R \sqcap S$	$R(x,y) \wedge S(x,y)$	$[\![R]\!]^{\mathcal{I}} \cap [\![S]\!]^{\mathcal{I}}$
R^{-1}	$R(x,y) \Leftrightarrow R^{-1}(y,x)$	$\{(d,d') \in \mathcal{D} \times \mathcal{D} \mid (d',d) \in [\![R]\!]^{\mathcal{I}}\}$

Beschreibungslogiken

Axiome: Aussagen über die Zusammenhänge zwischen Konzepten (T-Box, terminologische Aussagen) und über die Konzeptzugehörigkeit von Objekten (A-box, assertionale Aussagen).

T-Box	
Axiom	Semantik
$D \doteq C$	$[\![D]\!]^{\mathcal{I}} = [\![C]\!]^{\mathcal{I}}$
$D \sqsubseteq C$	$[\![D]\!]^{\mathcal{I}} \subseteq [\![C]\!]^{\mathcal{I}}$
$Q \doteq R$	$[\![Q]\!]^{\mathcal{I}} = [\![R]\!]^{\mathcal{I}}$
$Q \sqsubseteq R$	$[\![Q]\!]^{\mathcal{I}} \subseteq [\![R]\!]^{\mathcal{I}}$
A-box	
Axiom	Semantik
$a : C$	$[\![a]\!]^{\mathcal{I}} \in [\![C]\!]^{\mathcal{I}}$
$a\ R\ b$	$([\![a]\!]^{\mathcal{I}}, [\![b]\!]^{\mathcal{I}}) \in [\![R]\!]^{\mathcal{I}}$