Aussagen

Atomare Aussagen, die wahr oder falsch sein können:

“ Paris liegt in Frankreich ”

“ Essig schmeckt sauer ”

nicht: “ Paris ” oder “ in Frankreich ”

Syntax der Aussagenlogik

Atomare Formeln: $A_1, A_2, ...$;

Formeln induktiv definiert:

1. Alle atomaren Formeln sind Formeln.
2. Für alle Formeln F und G sind $(F \wedge G)$ (*Konjunktion*) und $(F \vee G)$ (*Disjunktion*) Formeln.
3. Für jede Formel F ist $\neg F$ (*Negation*) eine Formel.

Abkürzungen:

$A, B, C, ...$ für $A_1, A_2, A_3, ...$,

$(F \rightarrow G)$ für $(\neg F \vee G)$,

$(F \leftrightarrow G)$ für $((F \wedge G) \vee (\neg F \wedge \neg G))$

Notationsvarianten:

$\sim A$, $\overline{A}$ für $\neg A$,

& für $\wedge$

Bedeutung

Zuordnung einer “Bedeutung”, Interpretation:

Semantik der Aussagenlogik

Menge der *Wahrheitswerte*: $\{0, 1\}$,

D Teilmenge der atomaren Formeln,

Belegung: $\mathcal{A}$ **D** $\rightarrow \{0, 1\}$,

1. $\mathcal{A}((F \wedge G)) = \begin{cases} 1, & \text{falls } \mathcal{A}(F) = 1 \text{ und } \mathcal{A}(G) = 1 \\ 0, & \text{sonst} \end{cases}$

2. $\mathcal{A}((F \vee G)) = \begin{cases} 1, & \text{falls } \mathcal{A}(F) = 1 \text{ oder } \mathcal{A}(G) = 1 \\ 0, & \text{sonst} \end{cases}$

3. $\mathcal{A}(\neg F) = \begin{cases} 1, & \text{falls } \mathcal{A}(F) = 0 \\ 0, & \text{sonst} \end{cases}$

$\wedge$ entspricht “und”,
$\vee$ dem einschliesslichen “oder”,
$\rightarrow$ “wenn ..., dann ...”,
$\leftrightarrow$ “ genau dann ..., wenn ...”.

Wahrheitstafeln

$\mathcal{A}(F)$	$\mathcal{A}(G)$	$\mathcal{A}((F \wedge G))$
0	0	0
0	1	0
1	0	0
1	1	1

$\mathcal{A}(F)$	$\mathcal{A}(G)$	$\mathcal{A}((F \vee G))$
0	0	0
0	1	1
1	0	1
1	1	1

$\mathcal{A}(F)$	$\mathcal{A}(G)$	$\mathcal{A}((F \rightarrow G))$
0	0	1
0	1	1
1	0	0
1	1	1

$\mathcal{A}(F)$	$\mathcal{A}(G)$	$\mathcal{A}((F \leftrightarrow G))$
0	0	1
0	1	0
1	0	0
1	1	1

Beispiel

Sei $\mathcal{A}(A) = 1, \mathcal{A}(B) = 1, \mathcal{A}(C) = 0$.

Dann:

$$\begin{aligned}
\mathcal{A}(\neg((A \wedge B) \vee C)) &= \begin{cases} 1, & \text{falls } \mathcal{A}(((A \wedge B)) \vee C)) = 0 \\ 0, & \text{sonst} \end{cases} \\
&= \begin{cases} 0, & \text{falls } \mathcal{A}(((A \wedge B)) \vee C)) = 1 \\ 1, & \text{sonst} \end{cases} \\
&= \begin{cases} 0, & \text{falls } \mathcal{A}((A \wedge B)) = 1 \text{ oder } \mathcal{A}(C) = 1 \\ 1, & \text{sonst} \end{cases} \\
&= \begin{cases} 0, & \text{falls } \mathcal{A}((A \wedge B)) = 1 \ (\text{da } \mathcal{A}(C) = 0) \\ 1, & \text{sonst} \end{cases} \\
&= \begin{cases} 0, & \text{falls } \mathcal{A}(A) = 1 \text{ und } \mathcal{A}(B) = 1 \\ 1, & \text{sonst} \end{cases} \\
&= 0
\end{aligned}$$

Definitionen

Sei F eine Formel und $\mathcal{A}$ eine Belegung.

$\mathcal{A}$ heisst *zu F passend*,

falls $\mathcal{A}$ für alle in F vorkommenden Formeln definiert ist.

$\mathcal{A}$ heisst *Modell für F*, geschrieben $\mathcal{A} \models F$,

falls $\mathcal{A}(F) = 1$.

F heisst *erfüllbar*,

falls es mindestens ein Modell für F gibt (sonst ist F unerfüllbar).

F heisst *gültig* oder *Tautologie*, geschrieben $\models F$,

falls jede zu F passende Belegung ein Modell für F ist.

G *folgt* aus F, wenn für jede Belegung $\mathcal{A}$, die zu F und G passt, gilt:

wenn $\mathcal{A}$ Modell für F ist, ist $\mathcal{A}$ auch Modell für G.

Bemerkung: dies ist die *semantische* Entsprechung der Implikation! G *folgt* aus F genau dann, wenn $(F \rightarrow G)$ eine Tautologie ist.

Satz, Beweis,...

F ist gültig genau dann, wenn $\neg F$ unerfüllbar ist.

Beweis:

F ist gültig gdw. jede passende Belegung ist Modell für F

gdw. jede dieser Belegungen ist kein Modell für $\neg F$

gdw. F hat kein Modell, ist also unerfüllbar.

Für Belegungen $\mathcal{A}$ und $\mathcal{A}'$ gilt: $\mathcal{A}(F) = \mathcal{A}'(F)$ gdw. $\mathcal{A}$ und $\mathcal{A}'$ auf allen atomaren Formeln in F übereinstimmen.

Beweis durch Induktion über den Formelaufbau:

Behauptung gelte für F und G, zu zeigen: Behauptung gilt auch für $\neg F$, $(F \wedge G)$ und $(F \vee G)$

...

Äquivalenz, Ersetzbarkeit

Zwei Formeln F und G heissen *äquivalent*, $F \equiv G$, falls für alle zu F und G passenden Belegungen $\mathcal{A}$ gilt: $\mathcal{A}(F) = \mathcal{A}(G)$

Ersetzbarkeitstheorem

Seien zwei Formeln F und G äquivalent, H eine Formel mit mindestens einem Vorkommen der Teilformel F. Dann ist H äquivalent zu H', wenn H' aus H gebildet wird, indem F darin (mindestens einmal) durch G ersetzt wird.

(Beweis durch Induktion)

Äquivalenzregeln und Ersetzbarkeitstheorem ermöglichen Umformung von Formeln in Normalformen...

Äquivalenzregeln

- Idempotenz

  (a) $(F \vee F) \equiv F$ (b) $(F \wedge F) \equiv F$

- Kommutativität

  (a) $(F \vee G) \equiv (G \vee F)$ (b) $(F \wedge G) \equiv (G \wedge F)$

- Assoziativität

  (a) $((F \vee G) \vee Z) \equiv (F \vee (G \vee Z))$

  (b) $((F \wedge G) \wedge Z) \equiv F \wedge (G \wedge Z))$

- Distributivität

  (a) $(F \vee (G \wedge Z)) \equiv ((F \vee G) \wedge (F \vee Z))$

  (b) $(F \wedge (G \vee Z)) \equiv ((F \wedge G) \vee (F \wedge Z))$

- Absorption

  (a) $(F \wedge (F \vee G)) \equiv F$ (b) $(F \vee (F \wedge G)) \equiv F$

- Doppelnegation

  $\neg\neg F \equiv F$

- DeMorgans Gesetze

  (a) $\neg(F \vee G) \equiv (\neg F \wedge \neg G)$ (b) $\neg(F \wedge G) \equiv (\neg F \vee \neg G)$

- Tautologieregeln

  (a) $(F \vee G) \equiv F$, falls F Tautologie

  (b) $(F \wedge G) \equiv G$, falls F Tautologie

- Unerfüllbarkeitsregeln

  (a) $(F \vee G) \equiv G$, falls F unerfüllbar

  (b) $(F \wedge G) \equiv F$, falls F unerfüllbar

Beispiele

“Wenn die Sonne scheint, gehe ich schwimmen. Da es regnet, gehe ich nicht zum Schwimmen”

$$(So \to Schw) \equiv (\neg So \vee Schw)$$
$$\not\equiv (\neg So \to \neg Schw) \equiv (So \vee \neg Schw)$$

“Wenn das Kind Fieber oder Husten hat und wir erreichen den Arzt, dann rufen wir ihn”

$$\begin{array}{lll} & (((F \vee H) \wedge A) \to R) & \\ \equiv & (\neg((F \vee H) \wedge A) \vee R) & \text{Auflösung von } \to \\ \equiv & ((\neg(F \vee H) \vee \neg A) \vee R) & \text{deMorgan} \\ \equiv & (((\neg F \wedge \neg H) \vee \neg A) \vee R) & \text{deMorgan} \\ \equiv & (((\neg F \vee \neg A) \wedge (\neg H \vee \neg A)) \vee R) & \text{Distr.Ges.} \\ \equiv & ((\neg F \vee \neg A \vee R) \wedge (\neg H \vee \neg A \vee R)) & \text{Distr.Ges. + Ass.Ges.} \\ \equiv & ((\neg A \vee \neg F \vee R) \wedge (\neg A \vee \neg H \vee R)) & \text{Komm.Ges.} \end{array}$$

“Wenn das Kind Fieber hat, dann rufen wir den Arzt, wenn wir ihn erreichen, und, wenn wir ihn erreichen, dann rufen wir ihn, wenn das Kind hustet”

$$((A \to (F \to R)) \wedge (A \to (H \to R)))$$
$$\equiv ((\neg A \vee (F \to R)) \wedge (\neg A \vee (H \to R)))$$
$$\equiv ((\neg A \vee (\neg F \vee R)) \wedge (\neg A \vee (\neg H \vee R)))$$
$$\equiv ((\neg A \vee \neg F \vee R) \wedge (\neg A \vee \neg H \vee R))$$

Übung: Umformungen

Zu zeigen: zu jeder Formel F gibt es eine äquivalente Formel, die nur die Operatoren $\neg$ und $\rightarrow$ enthält.

Zu zeigen: nicht zu jeder Formel F gibt es eine äquivalente Formel, die nur die Operatoren $\vee$, $\wedge$ und $\rightarrow$ enthält.

Normalformen

Ein *Literal* ist eine atomare Formel oder deren Negation.

F ist in *konjunktiver Normalform* (KNF), wenn sie eine “Konjunktion von Disjunktionen von Literalen” ist. D.h., sie hat die Form:

$$F = ((L_{1,1} \vee L_{1,2} \vee ...) \wedge (L_{2,1} \vee L_{2,2} \vee ...) \wedge ...)$$

oder auch

$$F = (\bigwedge_{i=1}^{n} (\bigvee_{j=1}^{m_i} L_{i,j}))$$

Mengenschreibweise (Mengen von *Klauseln*):

$$F = \{\{L_{1,1}, L_{1,2}, ...\}, \{L_{2,1}, L_{2,2}, ...\}, ...\}$$

F ist in *disjunktiver Normalform* (DNF), wenn sie eine “Disjunktion von Konjunktionen von Literalen” ist. D.h., sie hat die Form:

$$F = ((L_{1,1} \wedge L_{1,2} \wedge ...) \vee (L_{2,1} \wedge L_{2,2} \wedge ...) \vee ...)$$

oder auch

$$F = (\bigvee_{i=1}^{n} (\bigwedge_{j=1}^{m_i} L_{i,j}))$$

Induktionsbeweis, dass diese Formeln für jede Formel existieren, liefert Konstruktionsverfahren dafür. Aber: exponentielle Verlängerung...

Diätvorschriften

“Wenn ich kein Bier trinke, habe ich immer Fisch.”

“Wenn ich Bier und Fisch zur selben Mahlzeit habe, verzichte ich auf Eiscreme.”

“Wenn ich Eiscreme habe oder Bier meide, dann rühre ich den Fisch nicht an”

Formel:

$$G = ((\neg B \to F) \wedge ((B \wedge F) \to \neg E) \wedge ((E \vee \neg B) \to \neg F))$$

Warhheitstafel:

B	F	E	(¬B →F)	(B ∧ F)	..→¬E	(E ∨¬B)	..→¬F	G
0	0	0	0	0	1	1	1	0
0	0	1	1	0	1	1	0	0
0	1	0	0	0	1	1	1	0
0	1	1	1	0	1	1	0	0
1	0	0	1	0	1	0	1	1
1	0	1	1	1	1	0	1	1
1	1	0	1	0	1	1	0	0
1	1	1	1	1	0	1	1	0

Also: $((B \wedge \neg F \wedge \neg E) \vee (B \wedge \neg F \wedge E)) \equiv (B \wedge \neg F)$

Hornformeln

Hornformel: Formel in KNF, deren Disjunktionen höchstens ein positives Literal enthalten.

Beispiel:

$$G = (A \vee \neg B) \wedge \neg C \wedge D \wedge (\neg E \vee \neg F)$$

Umformung in Konjunktionen von Implikationen:

$$G \equiv (B \to A) \wedge (C \to 0) \wedge (1 \to D) \wedge (E \wedge F \to 0)$$

Test auf Erfüllbarkeit: Eingabe: Hornformel F

1. Markiere alle Vorkommen einer atomaren Formel A, falls Teilformel $(1 \to A)$ in F vorkommt.
2. Wenn es in F Teilformeln der Form $(A_1 \wedge ...A_n \to 0)$ gibt und $A_1, ...A_n$ markiert sind, gib “unerfüllbar” aus und stoppe.

   Wenn es in F Teilformeln der Form $(A_1 \wedge ...A_n \to B)$ gibt, $A_1, ...A_n$ markiert sind und B nicht, markiere alle Vorkommen von B.

   Wiederhole, bis keine der beiden Formelarten mehr vorkommt.
3. Gib “erfüllbar” aus. Markierte Atomformeln sind mit 1 belegt: $\mathcal{A}(A_i) = 1$ gdw. A_1 hat eine Markierung.

Resolutionskalkül

Aufgabe: Unerfüllbarkeit einer Formelmenge
(Anwendungen: F Tautologie? Folgt G aus $F_1 \wedge ... F_n$?)

Seien K_1, K_2, R Klauseln. R ist *Resolvent* von K_1 und K_2, falls es ein Literal L gibt mit $L \in K_1$ und $\overline{L} \in K_2$ und $R = (K_1 \backslash \{L\} \cup K_2 \backslash \{\overline{L}\})$.

($\overline{L}$ ist $\neg A_i$, wenn $L = A_i$ und A_i, wenn $L = \neg A_i$)

Leere Menge als Resolvent: $\square$, unerfüllbar.

<u>Resolutionslemma:</u>

Eine Klauselmenge F ist äquivalent zu $F \cup \{R\}$, wenn R Resolvent zweier Klauseln aus F ist.

Res(F) ::= $F \cup \{R \mid R$ ist Resolvent zweier Klauseln in $F\}$
Res$^0(F) = F$, *Res*$^{n+1}(F) =$ *Res*(*Res*(F)), $n \geq 0$.

$$Res^*(F) = \bigcup_{n \geq 0} Res(F)$$

<u>Resolutionssatz der Aussagenlogik:</u>

Eine Klauselmenge F ist unerfüllbar genau dann, wenn $\square \in$ *Res*$^*(F)$.

Korrektheit: keine erfüllbare Formelmenge wird als unerfüllbar “erkannt”.
Vollständigkeit: alle unerfüllbaren Formelmengen werden erkannt.

Resolution, Beispiel

Zu zeigen: $(F \rightarrow G)$, also $(F \wedge \neg G)$?

$$F = ((\neg A \vee B) \wedge (\neg B \vee C) \wedge (A \vee \neg C) \wedge (A \vee B \vee C))$$

$G = (A \wedge B \wedge C) \qquad \neg G = (\neg A \vee \neg B \vee \neg C)$ (deMorgan)

$(F \wedge \neg G)$ als Klauselmenge:

$$\{\{\neg A, B\}, \{\neg B, C\}, \{A, \neg C\}, \{A, B, C\}, \{\neg A, \neg B, \neg C\}\}$$

$$\{B, C\} \qquad \{\neg A, \neg C\}$$

$$\{C\} \qquad \{\neg C\}$$

$$\square$$

Wozu Resolution?

$$H = ((\neg A \vee \neg B) \wedge (B \vee A))$$

enthält die gleichen positiven wie negativen Literale, ist aber weder gültig noch unerfüllbar. Beweis: Geben Sie $Res*(H)$ und $Res*(\neg H)$ an, $\square$ ist nicht Element davon.

Prädikatenlogik 1. Stufe

Erweiterung der Aussagenlogik um den Ausdruck von Eigenschaften von Objekten.

Beispiel:

$M = N$ genau dann, wenn <u>alle x</u> in M auch Element von N sind und alle y in N auch in M.

Beispiel:

“Alle Menschen sind sterblich”

“Sokrates ist ein Mensch”

Neu sind Variablen, Funktionen und Prädikate, sowie Quantoren.

Syntax der Prädikatenlogik

Variablen: $x_i, i = 1, 2, 3, ...$

Funktionssymbole: $f_i^k, i = 1, 2, 3, ..., k = 0, 1, 2, ...$

Prädikatssymbole: $P_i^k, i = 1, 2, 3, ..., k = 0, 1, 2, ...$

k ist die Stelligkeit, i Unterscheidungsindex

Terme:

1. Jede Variable ist ein Term.
2. Sei f ein Funktionssymbol mit Stelligkeit k und seien $t_1, ..t_k$ Terme, dann ist $f(t_1, ..t_k)$ ein Term.

"Nullstellige" Funktionen werden als Konstanten bezeichnet.

Formeln:

1. Seien $t_1, ..t_k$ Terme und P ein Prädikatssymbol mit der Stelligkeit k, dann ist $P(t_1, ..t_k)$ eine Formel.
2. Sei x eine Variable und F eine Formel, dann sind $\forall x(F)$ und $\exists x(F)$ Formeln.

   $\forall$ und $\exists$ heissen *Quantoren*, gelesen "für alle" und "es gibt ein ... so, dass"
3. Seien F, G Formeln, dann auch $\neg F$, $(F \vee G)$, $(F \wedge G)$, $(F \rightarrow G)$, $(F \leftrightarrow G)$.

Prädikatenlogik

Beispiel:

1. “Alle Menschen sind sterblich”: $\forall x(M(x) \rightarrow S(x))$
2. “Sokrates ist ein Mensch”: $M($sokrates$)$

gebundene / freie Variablen: innerhalb / ausserhalb des Wirkungsbereichs eines Quantors.

x ist in $\forall x(M(x) \rightarrow S(x))$ gebunden und frei in $(M(x) \rightarrow S(x))$.

Geschlossene Formel: keine freie Variable.

$\forall x(M(x) \rightarrow S(x))$ ist eine geschlossene Formel, $\forall x(M(x) \rightarrow S(y))$ eine offene.

Semantik der Prädikatenlogik

Eine *Struktur* $\mathcal{A} = (U_\mathcal{A}, I_\mathcal{A})$ besteht aus einer bel., nicht leeren *Grundmenge* $U_\mathcal{A}$, dem *Grundbereich, Universum*, und der Abbildung $I_\mathcal{A}$, *Interpretation*, die

- jedem k-stelligen Prädikatensymbol P (im Definitionsbereich von $I_\mathcal{A}$) ein k-stelliges Prädikat (= k-stellige Relation) $P^\mathcal{A}$ über $U_\mathcal{A}$,
- jedem k-stelligen Funktionssymbol f (im Definitionsbreich von $I_\mathcal{A}$) eine k-stellige Funktion $f^\mathcal{A}$ auf $U_\mathcal{A}$ und
- jeder Variable x (im Definitionsbreich von $I_\mathcal{A}$) ein Element $x^\mathcal{A}$ von $U_\mathcal{A}$ zuordnet.

$\mathcal{A}$ heisst zu einer Formel F passend, wenn $I_\mathcal{A}$ auf allen Variablen, Funktionssymbolen und Prädikatensymbolen in F definiert ist.

Semantik der PL

Sei F eine Formel, $\mathcal{A}$ eine zu F passende Struktur.
$\mathcal{A}$ (t) für Terme:

- falls t Variable, $t = x$: $\mathcal{A}$ (t) $= x^{\mathcal{A}}$.
- falls $t = f(t_1, ..., t_k)$: $\mathcal{A}$ (t) $= f^{\mathcal{A}}(\mathcal{A}(t_1), ..., \mathcal{A}(t_k))$

$\mathcal{A}$ (F) für Formeln:

- falls $F = P(t_1, ..., t_k)$:
  $$\mathcal{A}(F) = \begin{cases} 1, & \text{falls } (\mathcal{A}(t_1), ...\mathcal{A}(t_k)) \in P^{\mathcal{A}} \\ 0, & \text{sonst} \end{cases}$$
- falls $F = \forall x G$:
  $$\mathcal{A}(F) = \begin{cases} 1, & \text{falls für alle } d \in U_{\mathcal{A}} \text{ gilt: } \mathcal{A}_{[x/d]}(G) = 1 \\ 0, & \text{sonst} \end{cases}$$
- falls $F = \exists x G$:
  $$\mathcal{A}(F) = \begin{cases} 1, & \text{falls für ein } d \in U_{\mathcal{A}} \text{ gilt: } \mathcal{A}_{[x/d]}(G) = 1 \\ 0, & \text{sonst} \end{cases}$$

Dabei ist $\mathcal{A}_{[x/d]}$ diejenige Struktur die bis auf $\mathcal{A}$ (x) mit $\mathcal{A}$ identisch ist: $\mathcal{A}_{[x/d]}(x) = d$

$\wedge$, $\vee$ und $\neg$ wie in der Aussagenlogik...
alternative Schreibweise für $\mathcal{A}(F)$: $[\![F]\!]^{\mathcal{A}}$

Semantik der PL, Begriffe

Falls für $\mathcal{A}$ und F $\mathcal{A}$ (F) = 1, dann $\mathcal{A} \models F$.
“$\mathcal{A}$ erfüllt F, F gilt in $\mathcal{A}$, $\mathcal{A}$ ist Modell für F.”

Falls für alle passenden $\mathcal{A}$ gilt: $\mathcal{A}$ (F) = 1, dann $\models F$.
“F ist gültig.”

F heisst erfüllbar, falls F mindestens ein Modell hat,
sonst unerfüllbar.

Übung: Formulierung in PL

1. “P. ist Anhänger der logischen Grammatik-Schule und spricht mit allen Kollegen, die keine Generativisten sind.”
2. “Q. vertritt die Lexikalisch-Funktionale Grammatik und diskutiert mit jedem, der über formale Grundlagen arbeitet.”
3. “R. ist Duden-Redakteur, formale Grundlagen können ihm gestohlen bleiben, aber er spricht gern mit jedem ohne Ansehen seiner grammatiktheoretischen Präferenzen.”
4. “S. ist Government & Binding-Theoretiker und spricht mit seinesgleichen.”
5. “T. hängt der Head-Driven Phrase Structure Grammar an, redet aber mit allen Generativisten.”
6. “Alle Anhänger der LFG, HPSG und GB sind Generativisten.”
7. “Logiker und Generativisten beschäftigen sich mit formaler Sprachbeschreibung.”
8. “Eine Unterhaltung findet statt, wenn zwei (verschiedene) Leute miteinander reden.”

Lösungen

(Bem.: wenn “spricht mit” heissen soll “spricht nur mit”, wird aus den Implikationen ein $\leftrightarrow$!)

1. $\text{Logiker}(p) \wedge \forall x\, (\neg\, \text{Generativist}(x) \rightarrow \text{SprichtMit}(p,x))$
2. $\text{LFG}(q) \wedge \forall x\, (\text{Formalist}(x) \rightarrow \text{SprichtMit}(q,x))$
3. $\text{Duden}(r) \wedge \neg\text{Formalist}(q) \wedge \forall x\, (\text{SprichtMit}(r,x))$
4. $\text{GB}(s) \wedge \forall x\, (\text{GB}(x) \rightarrow \text{SprichtMit}(s, x))$
5. $\text{HPSG}(t) \wedge \forall x\, (\text{Generativist}(x) \rightarrow \text{SprichtMit}(t,x))$
6. $\forall x\, (\, (\text{LFG}(x) \vee \text{HPSG}(x) \vee \text{GB}(x)) \rightarrow \text{Formalist}(x))$
7. $\forall x\, (\, (\text{Logiker}(x) \vee \text{Generativist}(x)) \rightarrow \text{Formalist}(x))$
8. $\forall x\, \forall y\, ((\text{SprichtMit}(x,y) \wedge \text{SprichtMit}(y,x)$
   $\wedge \neg\, \text{Unterhaltung}(x,x) \wedge \neg\, \text{Unterhaltung}(y,y))$
   $\rightarrow \text{Unterhaltung}(x,y))$
   $\wedge\, (\forall z\, (\neg\, \text{Unterhaltung}(z,z)))$

Äquivalenzen

Seien F und G Formeln.

- (a) $\neg\forall xF \equiv \exists x\neg F$ (b) $\neg\exists xF \equiv \forall x\neg F$
- Falls x nicht frei in G vorkommt:
  (a) $(\forall xF\wedge G) \equiv \forall x(F\wedge G)$ (b) $(\forall xF\vee G) \equiv \forall x(F\vee G)$
  (c) $(\exists xF\wedge G) \equiv \exists x(F\wedge G)$ (d) $(\exists xF\vee G) \equiv \exists x(F\vee G)$
- (a) $(\forall xF \wedge \forall xG) \equiv \forall x(F \wedge G)$
  (b) $(\exists xF \vee \exists xG) \equiv \exists x(F \vee G)$
- (a) $\forall x\forall yF \equiv \forall y\forall xF$ (b) $\exists x\exists yF \equiv \exists y\exists xF$

NICHT äquivalent sind:

$(\forall xF \vee \forall xG) \not\equiv \forall x(F \vee G)$

$(\exists xF \wedge \exists xG) \not\equiv \exists x(F \wedge G)$

Beweis durch Gegenbeispiele...

Substitution etc.

Sei F eine Formel, x eine Variable und t ein Term.

Dann ist $F[x/t]$ diejenige Formel, in der in F jedes freie Vorkommen von x durch t ersetzt wird.

$[x/t]$ ist eine *Substitution*.

Überführungslemma:

$$\mathcal{A}(F[x/t]) = \mathcal{A}_{[x/\mathcal{A}(t)]}(F)$$

Gebundene Umbenennung:

Sei $F = QxG$ eine Formel ($Q \in \{\exists, \forall\}$), y komme nicht in G vor. Dann:

$$F \equiv QyG[x/y]$$

Zu jeder Formel existiert äquivalente Formel in *bereinigter* Form, d.h. keine Variable kommt sowohl frei als auch gebunden vor, und hinter verschiedenen Quantoren stehen verschiedene Variablen.

Anwendung: Logikprogramme

Logikprogramm: Sequenz von Klauseln der Form:

```
P :- Q, R, S.
```

`P` ist *Kopf*, der Rest *Rumpf* der Klausel,
entspricht $((Q \wedge R \wedge S) \rightarrow P)$,
wenn Q, R und S erfüllt sind, dann auch P)

Klausel mit leerem Rumpf: *Fakt*:

```
P.
```

Klausel mit leerem Kopf: *Frage* :

```
?- P.
```

Anwendung: Eigenschaften von Relationen

- ein reflexives Prädikat:

$$\forall x(P(x,x))$$

- ein transitives:

$$\forall x \forall y \forall z((P(x,y) \land P(y,z)) \rightarrow P(x,z))$$

- ein symmetrisches:

$$\forall x \forall y(P(x,y) \rightarrow P(y,x))$$

- Die schlechte Nachricht: Antisymmetrie ist nicht in Prädikatenlogik erster Stufe darstellbar.

Antisymmetrie

Formulierungen wie:

$$\forall x \forall y((P(x,y) \land P(y,x)) \rightarrow Id(x,y))$$

setzen Identität als Prädikat voraus; das ist aber ohne Einführung eines Quantors “es gibt genau ein...” nicht möglich.

Die Formel:

$$F = \forall x \forall y((P(x,y) \land P(y,x)) \rightarrow P(x,y))$$

drückt nur aus, dass $I_{\mathcal{A}}(P)$ eine Äquivalenzrelation auf der Grundmenge $U_{\mathcal{A}}$ sein muss, damit $\mathcal{A} \models F$ gilt.

Identität und Äquivalenz können in der Prädikatenlogik nicht unterschieden werden!