Posets

Partiell geordnete Menge (poset): $\langle A, \leq \rangle$

eine Menge A und eine reflexive, antisymmetrische und transitive Relation $\leq$ (partielle Ordnungsrelation) darin.

Kette: vollständig (total) geordnete Menge $a \leq b$ oder $b \leq a$ für alle a, b.

Sei $B \subseteq A$.

$x \in A$ heisst *untere Grenze* (oder untere *Schranke*) von B, wenn es kein $y \in B$ gibt mit $y \leq x$.

x ist *Infimum (greatest lower bound)* von B, inf$B$, wenn für alle unteren Schranken u von B gilt: $u \leq x$.

Umkehrung der Relation erhält die Eigenschaften des Posets.

$x \in A$ heisst *obere Grenze von* B (oder obere *Schranke*), wenn es kein $y \in B$ gibt mit $x \leq y$.

x ist *Supremum (least upper bound)* von B, sup$B$, wenn für alle oberen Schranken o von B gilt: $x \leq o$.

Supremum und Infimum sind immer eindeutig!

Verbände

Zwei Hinleitungen:

1. durch Posets:

Ein Poset $\langle A, \leq \rangle$ ist ein Verband, wenn sup$\{a, b\}$ und inf$\{a, b\}$ für alle $a, b \in A$ existieren.

2. als algebraische Struktur:

Zwei neue (binäre) Operationen auf A:

$a \wedge b =$ inf$\{a, b\}$ (*meet*) und $a \vee b =$ sup$\{a, b\}$ (*join*).

Eigenschaften eines Verbandes:

Idempotenz

$$a \vee a = a,\ a \wedge a = a$$

Kommutativität

$$a \vee b = b \vee a,\ a \wedge b = b \wedge a$$

Assoziativität

$$(a \vee b) \vee c = a \vee (b \vee c),\ (a \wedge b) \wedge c = a \wedge (b \wedge c)$$

Absorption

$$a \wedge (a \vee b) = a,\ a \vee (a \wedge b) = a$$