Warum ?

<table>
<tr><th>was?</th><th>Linguistik</th><th>Computerlinguistik</th></tr>
<tr><td rowspan="2">Algebra
u. Logik</td><td colspan="2">exakte formale Beschreibungen von:</td></tr>
<tr><td>Syntax u. Semantik</td><td>zusätzlich Weltwissen</td></tr>
<tr><td>Theoretische
Informatik</td><td></td><td>Aufwandsabschätzungen,
Berechenbarkeit</td></tr>
<tr><td>Statistik</td><td>quantitative
Linguistik</td><td>“Performanz”:
kogn. Modellierung
techn. P.-Steigerung</td></tr>
</table>

1.1 Einführung;Mengen und Relationen

1.2 Funktionen

1.3 Algebraische Strukturen

2 Logik, formale Systeme

2.1 Aussagenlogik

2.2 Prädikatenlogik

2.3 Formale Systeme, Inferenz

2.4 Nicht-Standard-Logiken

2.5 Merkmalslogik, Unifikation

2.6 Typtheorie, Lambda-Kalkül

3 Theoretische Informatik

3.1 Formale Grammatiken, Chomsky-Hierarchie

3.2 Sprachen und Automaten

3.3 Berechenbarkeit und Komplexität

4 Statistik (noch vorläufig)

4.1 Grundbegriffe

4.2 Wahrscheinlichkeitstheorie

4.3 Hidden Markov Modelle

4.4 Anwendungen

Mengen

Eine *Menge* ist eine (ungeordnete) Sammlung
von unterscheidbaren Objekten, ihren *Elementen*.
– das können auch Mengen sein!

Eine Menge ist wohl-definiert, wenn nach einem klaren Prinzip entschieden werden kann, ob ein Objekt Element einer Menge ist oder nicht.

Schreibweise:

Grossbuchstaben $A, B, C, ...$ für Mengen,

Kleinbuchstaben $a, b, c, ...x, y, ...$ für Elemente.

leere Menge: $\emptyset$

x ist / ist nicht Element von M :

$x \in M$ bzw. $x \notin M$

Beschreibungen für Mengen

1. Listen-Notation, Aufzählung:
   $\{1, 2, 3\}$
2. Charakteristische Eigenschaft, Beschreibung:
   $\{x \mid x$ gerade$\} \rightarrow$ Russells Paradox...
3. Verfahren zur Generierung der Elemente:
   1. 4 ist Element der Menge M.
   2. wenn x Element der Menge M ist,
      dann auch x + 3.
   3. nichts sonst ist Element der Menge M.

Identität:

$M = N$ genau dann, wenn alle x in M auch Element von N sind und alle y in N auch in M.

Kardinalität:

Anzahl der Elemente einer Menge:

$$\mid A \mid \text{ oder } \# \, (A)$$

Wenn $\mid A \mid$ eine natürliche Zahl ist, heisst A *endlich*, sonst *unendlich*. Beispiel?

Mengenoperationen

Teilmenge: $A \subseteq B$ genau dann, wenn alle Elemente von A auch Elemente von B sind.

Für alle Mengen A gilt:

$$A \subseteq A \text{ und } \emptyset \subseteq A.$$

echte Teilmenge:

$$A \subset B \text{ gdw. } A \subseteq B \text{ und } \mid A \mid \; < \; \mid B \mid .$$

disjunkte Mengen: Zwei (mehrere) Mengen heissen *disjunkt*, wenn kein x Element von A und B ist.

Potenzmenge: 2^M, Menge aller Teilmengen von M.

Vereinigung: $A \cup B$, alle Elemente von A oder B.

Schnitt: $A \cap B$, Menge aller Elemente von A und B.

Differenz: $A - B, A \setminus B ::= \{x \mid x \in A \text{ and } x \notin B\}$

Komplement: $A' ::= \{x \mid x \notin A\}$
immer in Bezug auf Grundmenge / Universum U:

$$A' = U \setminus A$$

Venn-Diagramme

selbst malen!

Verknüpfungseigenschaften

- Idempotenz
  (a) $X \cup X = X$ (b) $X \cap X = X$
- Kommutativität
  (a) $X \cup Y = Y \cup X$ (b) $X \cap Y = Y \cap X$
- Assoziativität
  (a) $(X \cup Y) \cup Z = X \cup (Y \cup Z)$
  (b) $(X \cap Y) \cap Z = X \cap (Y \cap Z)$
- Distributivität
  (a) $X \cup (Y \cap Z) = (X \cup Y) \cap (X \cup Z)$
  (b) $X \cap (Y \cup Z) = (X \cap Y) \cup (X \cap Z)$
- Identitätsgesetze
  (a) $X \cup \emptyset = X$ (b) $X \cap \emptyset = \emptyset$
  (c) $X \cup U = U$ (d) $X \cap U = X$
- Komplementgesetze
  (a) $X \cup X' = U$ (b) $X \cap X' = \emptyset$
  (c) $(X')' = X$ (d) $X \backslash Y = X \cap Y'$
- DeMorgans Gesetze
  (a) $(X \cup Y)' = X' \cap Y'$ (b) $(X \cap Y)' = X' \cup Y'$
- Konsistenz
  (a) $X \subseteq Y$ gdw. $X \cup Y = Y$
  (b) $X \subseteq Y$ gdw. $X \cap Y = X$

Tupel

geordnetes Paar, mengentheoretische Definition:

$$\langle a, b \rangle ::= \{\{a\}, \{a, b\}\}$$

mit der Eigenschaft $\langle a, b \rangle \neq \langle b, a \rangle$.

Kartesisches Produkt:

$$A \times B ::= \{\langle a, b \rangle \mid a \in A \text{ und } b \in B\}$$

Projektion auf erste / zweite Koordinate von $C \subseteq A \times B$:

$$M = \{a \mid \langle a, b \rangle \in C\} \text{ bzw. } N = \{b \mid \langle a, b \rangle \in C\}$$

Erweiterung auf *n-Tupel* möglich...

Relationen

(zweistellige) Relationen: Beziehungen zwischen (zwei) Objekten.

Relation $R \subseteq A \times B$ von A nach B;

falls $A = B$, in A.

Definitionsbereich, domain:

$\{a \mid a \in A$ und es gibt ein $b \in B$ so, dass $\langle a, b \rangle\ inR\}$

Wertebereich, range:

$\{b \mid b \in B$ und es gibt ein $a \in A$ so, dass $\langle a, b \rangle\ inR\}$

Schreibweise: aRb oder Rab.

$$R = \{\langle a, b \rangle \mid aRb\}$$

Komplement von $R \subseteq M \times N$:

$$R' ::= (M \times N) \setminus R$$

Inverse:

$$R^{-1} ::= \{\langle b, a \rangle \mid aRb\}$$

identische Abbildung in A:

$$id_A ::= \{\langle a, a \rangle \mid a \in A\}$$

Eigenschaften von Relationen $R \subseteq A \times A$

- *Reflexivität*:
  für alle $x \in A : \langle x, x \rangle \in R$, d.h. $id_A \subseteq R$.
  - *nicht reflexiv*: nicht <u>alle</u> $\langle x, x \rangle \in R$, $id_A \not\subseteq$ von R.
  - *irreflexiv*: <u>kein</u> $\langle x, x \rangle \in R$, $id_A \cap R = \emptyset$.

- *Symmetrie*:
  für alle $\langle x, y \rangle \in R : \langle y, x \rangle \in R$.
  - *nicht symmetrisch*: nicht für alle $\langle x, y \rangle \in R$ auch $\langle y, x \rangle \in R$.
  - *asymmetrisch*: <u>nie</u> sowohl $\langle x, y \rangle \in R$ als auch $\langle y, x \rangle \in R$ (also auch irreflexiv).
  - *antisymmetrisch*: wenn $\langle x, y \rangle \in R$ <u>und</u> $\langle y, x \rangle \in R$, dann $x = y$.

- *Transitivität*:
  für alle $\langle x, y \rangle, \langle y, z \rangle \in R : \langle x, z \rangle \in R$.
  - *nicht transitiv*: nicht für alle ...
  - *intransitiv*: für keine ...

Beispiel

Relation K in der Menge W der Artikel (Relativpronomen) und Substantive:

$\langle w_1, w_2 \rangle \in K$ gdw. eines der beiden ist Artikel, das andere Substantiv und w_1 und w_2 kongruieren in Kasus, Numerus und Genus

- irreflexiv
- symmetrisch
- nicht transitiv

Überprüfung durch Relationstafel:

zur Reflexivität betrachte die Diagonale...

zur Symmetrie: sind die Einträge an der Diagonale gespiegelt?

zur Transitivität: nachrechnen...

Äquivalenzrelationen

Relationen, die

- reflexiv
- symmetrisch
- transitiv

sind, heissen *Äquivalenzrelationen*. Sie *zerlegen* ihren Definitionsbereich in disjunkte Teilmengen, die *Äquivalenzklassen*.

Schreibweise:

Äquivalenzklasse von x:

$$[\![x]\!] ::= \{y \mid \langle x, y\rangle \in R\}$$

x ist *äquivalent* zu y : $x \sim y$ (auch: *kongruent*)

Beispiel: Relation R in der Menge N der natürlichen Zahlen (mit 0):

$\langle n, m\rangle \in R$ gdw. m und n hinterlassen bei der Division durch 4 den gleichen Rest.

$$R = \{\langle 0,0\rangle, \langle 0,4\rangle, ..., \langle 1,1\rangle, \langle 1,5\rangle, ..., \langle 4,0\rangle, ...\}$$

Ordnungsrelationen

Transitive Relationen heissen *Ordnungsrelationen*.

- *partielle Ordnung,* $\leq$:
  - transitiv, d.h. wenn $x \leq y \wedge y \leq z$, dann $x \leq z$.
  - reflexiv, d.h. für alle $x : x \leq x$.
  - antisymmetrisch, d.h. wenn $x \leq y \wedge y \leq x$, dann $x = y$.

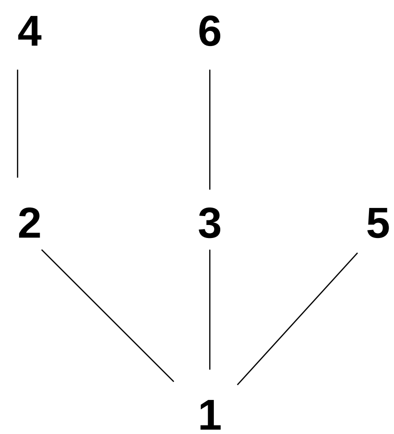
- *totale Ordnung*:
  alle x, y vergleichbar: $x \leq y$ <u>oder</u> $y \leq x$.

- *strikte Ordnung,* $<$
  - transitiv
  - irreflexiv
  - asymmetrisch

Beispiele

Partielle Ordnungsrelationen lassen sich in sog. Hasse-Diagrammen darstellen:

$$R = \{\langle a, b\rangle \mid a, b \in \{1, 2, 3, 4, 5, 6\} \text{ und } a \text{ teilt } b\}$$



Totale Ordnungen bilden eine Kette, betrachte Hasse-Diagramm von

$$R = \{\langle a, b\rangle \mid a, b \in \{1, 2, 4, 8\} \text{ und } a \text{ teilt } b\}$$

Ordnungsrelationen II

Sei eine Ordnungsrelation R in A gegeben.

$x \in A$ heisst *untere Grenze*, wenn es kein $y \in A$ gibt mit $\langle y, x \rangle \in R$.

x ist *kleinstes* Element von A, wenn für alle $y \in A$ gilt: $\langle x, y \rangle \in R$.

obere Grenze und *grösstes* Element entsprechend...

wohlgeordnet: jede Teilmenge hat kleinstes Element...